GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN DER BETRAGFLÄCHEN HOLOMORPHER FUNKTIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde

des Fachbereiches Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Dieter Schmersau
aus Berlin

Berlin 1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549607_0023

GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN DER BETRAGFLÄCHEN HOLOMORPHER FUNKTIONEN

INAUGURAL - DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

des Fachbereiches Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Dieter Schmersau

aus Berlin

Berlin 1977

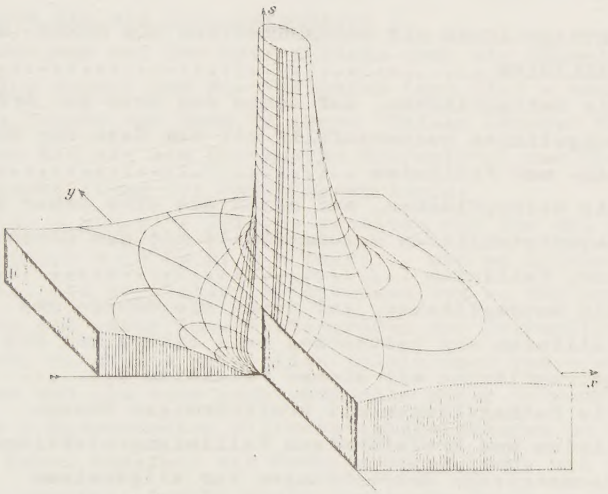
1. Referent: Professor Dr. Heinrich Begehr

2. Referent: Privatdozent Dr. Fritz Gackstatter

Tag der mündlichen Prüfung: 5. 8. 1977

Tag der Promotion: 1o. 8. 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.



Betragfläche zu $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

I SCHRAUBEN-, REGEL-, SCHIEB- UND MINIMALFLÄCHEN SOWIE FLÄCHEN KONSTANTER GAUSSscher KRÜMMUNG UNTER DEN BETRAGFLÄCHEN 5

§1 Einleitung 5

§2 Die Schraubenflächen, insbesondere die Rotationsflächen, unter den Betragflächen 16

§3 Die Regelflächen unter den Betragflächen 3o

§4 Die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung, die Minimalflächen und spezielle Schiebflächen unter den Betragflächen 49

II BETRAGFLÄCHEN MIT BESONDERHEITEN DER HÖHEN- BZW. FALLINIEN 55

§1 Die Betragflächen, auf denen das Netz der Krümmungslinien zusammenfällt mit dem Netz der Höhen- und Fallinien 55

§2 Die Betragflächen, auf denen die eine Schar der Asymptotenlinien zusammenfällt mit den Höhen- bzw. Fallinien 63

§3 Die Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden,und die Betragflächen mit ebenen Fallinien 79

§4 Die Betragflächen mit kreisförmigen Höhenlinien und kreisförmigen Fallinienprojektionen 84

§5 Geometrische Betrachtungen zur allgemeinen Potenz 88

Literaturverzeichnis 1o8

I SCHRAUBEN-, REGEL-, SCHIEB- UND MINIMALFLÄCHEN SOWIE FLÄCHEN KONSTANTER GAUSSscher KRÜMMUNG UNTER DEN BETRAGFLÄCHEN

§1 Einleitung

1.1 Die Betragfläche einer holomorphen Funktion

Es sei $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine im Gebiet G der z- Ebene holomorphe Funktion. Tragen wir über jeden Punkt $z = x + iy$ des Definitionsbereichs von f den Betrag $|f(z)|$ als Applikate in einem kartesischen x,y,w - Koordinatensystem ab, so erhalten wir die Betragfläche F (Analytische Landschaft, Relief) von f. Nach dieser Konstruktion haben wir für F die Darstellung

(1) $F: \varphi = \varphi(x,y) = (x,y,w(x,y))$ mit $w(x,y) = |f(z)|$.

Die Funktion

(2) $w: G \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \longrightarrow w(x,y) = |f(z)|$ bezeichnen wir als Betragsfunktion .

Zeichnet man auf der Betragfläche noch die Höhenlinien ($|f(z)| = \text{const}$) und die Fallinien ($\arg f(z) = \text{const}$) ein, wie es Jahnke und Emde in ihren "Tafeln höherer Funktionen" tun, so ist sie ein geeignetes Hilfsmittel zur übersichtlichen Darstellung des Funktionsverlaufs.

Mit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ erhalten wir für die Betragsfunktion $w(x,y) = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$, und es erscheint naheliegend, die partiellen Ableitungen von w, die man benötigt, um etwa die sechs Fundamentalgrößen der Betragfläche zu berechnen, durch die partiellen Ableitungen von u und v auszudrücken und sie dann gegebenenfalls unter Verwendung der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen zu vereinfachen. Dabei entsteht ein Formelapparat, der, wie E.Ullrich in [XXIV] anmerkt, funktionentheoretische Schlüsse nicht begünstigt. Anders verfährt J.Zaat, ein Schüler von E.Ullrich, in seiner Arbeit [XXVI] über Betragflächen. Er selber sagt dazu im Vorwort: " Die Formeln der metrischen Differentialgeometrie werden in passender Weise umgeformt, so daß sie den Anschluß an die Kennzeichnung einer analytischen Funktion durch die Größen f(z), f'(z) und f''(z) leicht und übersichtlich gestatten." So gewinnt er zunächst für die partiellen Ableitungen der Betragsfunktion die Formeln [1)]

---

1) Man erhält diese Formeln wohl am einfachsten durch die Betrachtung von $\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$.

$$w_x = |f(z)|\,\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right),\quad w_y = -|f(z)|\,\mathrm{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right),$$

$$(3)\qquad w_{xx} = |f(z)|\left\{\mathrm{Im}^2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\right)\right\},$$

$$w_{yy} = |f(z)|\left\{\mathrm{Re}^2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\right)\right\},$$

$$w_{xy} = |f(z)|\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) - \mathrm{Im}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\right)\right\},$$

die sich als ein wichtiges Hilfsmittel bei unseren Untersuchungen erweisen werden.

Aus (3) folgt ohne Schwierigkeiten, daß jede Betragsfunktion der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(4) $w\,(w_{xx} + w_{yy}) = w_x^2 + w_y^2$ genügt.

(4) tritt bei Zaat in etwas allgemeinerer Weise auf, nämlich unter Benutzung der Richtungsableitungen nach beliebigen, zueinander orthogonalen Richtungen (Zaat [XXVI], S.6), und auch Reimerdes leitet (4) unter Benutzung der partiellen Ableitungen von u und v und der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen ab (Reimerdes[XIX], S. 14 ff). Beide benutzen (4) in ihren Untersuchungen nicht weiter. Da wir verschiedentlich von (4) entscheidend Gebrauch machen, wollen wir schon jetzt näher auf diese Differentialgleichung eingehen. Bemerkenswerterweise ist nämlich nicht nur jede Betragfläche eine Integralfläche von (4), sondern auch jede Integralfläche von (4) läßt sich als Betragfläche deuten; denn zunächst ist für $w(x,y) \neq 0$ (4) gleichbedeutend mit

1. $\dfrac{ww_{xx} - w_x^2}{w^2} + \dfrac{ww_{yy} - w_y^2}{w^2} = 0$. Daraus folgt aber

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{w_x}{w}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{w_y}{w}\right) = 0$, und somit erhalten wir

3. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\log|w|) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\log|w|) = 0$, d.h. aber, daß

4. $h(x,y) = \log|w(x,y)|$ eine harmonische Funktion ist. Ist jetzt $k(x,y)$ eine zu $h(x,y)$ konjugierte Funktion, so ist

5. $g(z) = h(x,y) + ik(x,y)$ holomorph, und damit ist auch

6. $f(z) = e^{g(z)} = e^{h(x,y)} \cdot e^{ik(x,y)}$ holomorph. Also ist

7. $w^*(x,y) = e^{h(x,y)}$ eine Betragsfunktion, und F mit der Darstellung

8. $F : \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x,y) = (x,y,w^*(x,y))$ ist die Betragfläche zu f. Nach 4. gilt aber

9. $w(x,y) = \pm w^*(x,y)$. Für $w(x,y) = +w^*(x,y)$ ist damit

der Nachweis erbracht, für $w(x,y) = -w^*(x,y)$ halten wir zunächst fest, daß die zu $w(x,y)$ gehörige Integralfläche $\hat{F}$ von (4) die Darstellung

1o. $\hat{F} : \hat{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{x}}(x,y) = (x,y,-w^*(x,y))$ hat, d.h. aber, daß $\hat{F}$ aus der Betragfläche F durch Spiegelung an der x,y - Ebene hervorgeht. Drehen wir jetzt $\hat{F}$ um 18o° um die x - Achse, so gelangen wir zu $\check{F}$ mit

11. $\check{F} : \check{\mathfrak{x}} = \check{\mathfrak{x}}(x,y) = (x,-y,w^*(x,y))$.

Die durch 6. gegebene Funktion $z \longrightarrow f(z)$ ist holomorph im Gebiet G. $\bar{G}$ sei das Gebiet, das aus G durch Spiegelung an der x - Achse hervorgeht. Dann ist die Funktion $\check{f}$ mit $z \longrightarrow f(\bar{z})$ in $\bar{G}$ definiert und dort holomorph. Außerdem ist aber, wie man sieht, $\check{F}$ die Betragfläche zu $\check{f}$. Also geht die Integralfläche $\hat{F}$ von (4) aus der Betragfläche $\check{F}$ durch eine eigentliche Bewegung, nämlich die oben genannte Drehung, hervor. Damit ist gezeigt, daß sich tatsächlich jede Integralfläche von (4) als Betragfläche deuten läßt. Darüberhinaus haben wir gesehen, daß wir uns bei (4), wenn es um die Geometrie der Integralflächen geht, auf die Lösungen $w(x,y)$ mit $w(x,y) \geq 0$ beschränken können. In §3 dieses Kapitels werden wir noch einen anderen Zugang zu der Differentialgleichung (4) angeben.

Nun zurück zu dem Formelapparat von Zaat. Unter Benutzung von (3) gewinnt er für das Gaußsche Krümmungsmaß K der Betragfläche den Ausdruck

$$(5) \qquad K(z) = \frac{|f''(z)|^2}{(1+|f'(z)|^2)^2} \; \mathrm{Re}\left(\frac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} - 1\right) ,$$

und für die mittlere Krümmung H der Betragfläche erhält er

$$(6) \qquad H(z) = \frac{|f'(z)|^2}{2|f(z)|\,(1+|f'(z)|^2)^{3/2}} \left[1+|f'(z)|^2 \cdot \mathrm{Re}\left(1-\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}\right)\right]$$

(Zaat[XXVI], S.1o). Neben den Formeln für K und H benötigen wir noch die Differentialgleichung für die Asymptotenlinien der Betragfläche in der von Zaat angegebenen Form. Mit $dz = dx + i\,dy$ erhält man

$$(7) \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\,dz^2\right) = 0 \quad \text{(Zaat[XXVI], S.14).}$$

Grundsätzlich ist klar, daß die Heranziehung der Betragflächen zu Beziehungen zwischen der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie führen kann. Die Untersuchungen, die mit Betragflächen im Zusammenhang stehen, lassen sich grob einteilen in solche, die geometrischer Natur sind, und sol-

che, die funktionentheoretischer Natur sind. Beide Aspekte werden sich in der Regel nicht scharf trennen lassen.
Die Arbeit von Zaat zielt eindeutig darauf ab, geometrische Erkenntnisse über die Klasse der Betragflächen zu gewinnen, wobei es in erster Linie um gemeinsame geometrische Eigenschaften der Betragflächen geht. Seine Untersuchungen werden zum Teil in dem Lehrbuch[XV]von Kreyszig dargestellt. Dies ist übrigens, soweit wir es überblicken, das einzige Lehrbuch über Differentialgeometrie, in das die Betragflächen Eingang gefunden haben.
In den in neuerer Zeit entstandenen Arbeiten[VI]und[VII]von F. Gackstatter hingegen,werden differentialgeometrische Größen, unter anderem die Gaußsche Krümmung K der Betragfläche, mit Vorteil benutzt, um zu neuen Ergebnissen innerhalb der Wertverteilungslehre zu gelangen.
Der eingangs erwähnten Untersuchung von Ullrich, auf die wir noch wiederholt zu sprechen kommen, könnte man etwa einen "Mittelplatz" zuordnen. Interessant ist nun, daß in den funktionentheoretischen Arbeiten von Gackstatter nicht nur von der Zaatschen Formel für K(z) erfolgreich Gebrauch gemacht wird, sondern auch von der speziellen Tatsache, daß durch Ullrich alle Torsen unter den Betragflächen bestimmt wurden (vgl. dazu Gackstatter[VI], §8 Über Zylinderwege .... und §9 Über Kegelwege ....). Dies kann man vielleicht als Indiz dafür ansehen, daß es durchaus nicht nur lohnt, in seinen Untersuchungen nach gemeinsamen Eigenschaften der Betragflächen zu suchen, sondern daß es auch, vielleicht gerade für die Anwendung in der Funktionentheorie, von Belang sein kann, genaue Kenntnisse über Teilklassen zur Verfügung zu haben.
Bevor wir im nächsten Abschnitt eine Übersicht geben über die eigenen Problemstellungen und Ergebnisse, sollen noch kurz zwei Flächenklassen angesprochen werden, die gleichfalls eng mit den holomorphen Funktionen zusammenhängen und auch in der vorliegenden Arbeit an einigen Stellen herangezogen werden.
Benutzen wir bei unserer eingangs erwähnten Konstruktion nicht den Betrag von f als Höhenfunktion, sondern die harmonische Funktion $w(x,y) = Re(f(z)) = u(x,y)$ bzw. $w(x,y) = Im(f(z)) = v(x,y)$, so erhalten wir die zu f gehöri-

ge Realteilfläche F_R bzw. die Imaginärteilfläche F_J mit der Darstellung

(8) $F_R : \varphi_R = \varphi_R(x,y) = (x,y,u(x,y))$ bzw.

(9) $F_J : \varphi_J = \varphi_J(x,y) = (x,y,v(x,y))$.

Einschlägige geometrische Arbeiten stammen u.a. von Kreyszig [XVI] und Kreyszig - Pendl [XVII]. Der Formelapparat vereinfacht sich im Vergleich zu den Betragflächen erheblich. So erhält man bemerkenswerterweise für die Gaußsche Krümmung in beiden Fällen

$$K(z) = - \frac{|f''(z)|^2}{(1+|f'(z)|^2)^2} \quad .$$

Von Gackstatter stammt wieder eine funktionentheoretische Arbeit [VIII], in der die Gaußsche und die mittlere Krümmung der Realteilflächen herangezogen werden. Er merkt dort an (Einleitung, Fußnote 1)), daß die Realteilflächen ein weniger verzerrtes Modell der zugehörigen Funktionen zu sein scheinen.

1.2 Die Inhaltsangabe

Die Fragestellungen der folgenden Paragraphen des ersten Kapitels sind Analoga zu Fragestellungen der klassischen Differentialgeometrie. So kennt man etwa seit langem die Regel- und Rotationsflächen, die zugleich Minimalflächen sind. Wir haben diese Fragen nun in bezug auf die Klasse der Betragflächen holomorpher Funktionen formuliert und untersucht. Den Anstoß dazu gab Ullrich durch seine Arbeit [XXIV]. Er weist nämlich darauf hin, daß gewisse Potenzbetragflächen Rotationsflächen sind. Das legt die Frage nahe, ob es weitere Rotationsflächen unter den Betragflächen gibt oder ob durch die Beispiele von Ullrich bereits alle Rotationsflächen erfaßt sind. Die Antwort gibt

Satz 1: Die einzigen Betragflächen, die gleichzeitig Rotationsflächen sind, sind die Betragflächen zu $f(z) = (z_1 z + z_0)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$.

Nachdem sich die Klasse der Betragflächen im Hinblick auf Rotationsflächen als recht "eng" erwiesen hat, könnte man vermuten, daß man auf weitere Betragflächen mit leicht überschaubarer geometrischer Gestalt stößt, wenn man die Klasse der Rotationsflächen in sinnvoller Weise erweitert. Eine derartige Erweiterung stellen bekanntlich die Schraubenflächen

dar. Dazu beweisen wir

Satz 2: Außer den bereits in Satz 1 aufgezählten Rotationsflächen gibt es keine Schraubenflächen unter den Betragflächen.

Neben den Torsen unter den Betragflächen, die Ullrich vollständig bestimmt hat, weist derselbe darauf hin, daß gewisse Potenzbetragflächen windschiefe Regelflächen (gerade Konoide der Exponentialwendel) sind. Damit ergibt sich die gleiche Fragestellung wie bei den Rotationsflächen. Wieder erweist sich die Aufzählung von Ullrich als vollständig; denn es gilt

Satz 5: Die einzigen Betragflächen, die zugleich windschiefe Regelflächen sind, sind die Betragflächen zu $f(z) = (z_1 z+z_0)^{i\vartheta}$ mit $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, z_0, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$.

Die Untersuchung über die Torsen unter den Betragflächen war auch der Anlaß zu prüfen, ob es Betragflächen mit $K(z) = K_0 \neq 0$ gibt. Das Ergebnis ist formuliert in

Satz 6: Es gibt keine Betragflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung $K_0 \neq 0$.

Eine weitere wichtige Klasse bilden die Minimalflächen. Wir beweisen dazu

Satz 7: Es gibt außer der Ebene keine Minimalfläche unter den Betragflächen.[1)]

Hierzu muß angemerkt werden, daß Ullrich am Schluß seiner Arbeit ([XXIV], S. 328) auf diesen Sachverhalt hinweist und auch den bei uns zur Anwendung gekommenen Beweisgedanken mitteilt.

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels befassen wir uns mit speziellen Schiebflächen unter den Betragflächen. Veranlassung dazu gibt etwa die Betragfläche zu $f(z) = (az + b)^2$, die bereits bei den Rotationsflächen auftrat . In diesem Zusammenhang beweisen wir

Satz 8: Die einzigen holomorphen Funktionen, deren Betrag der partiellen Differentialgleichung $w_{xy} = 0$ genügt, sind die Funktionen

$f(z) = (az+b)^2$, $f(z) = ae^{kz}$, $f(z) = b\cos^2(a + kz)$;

dabei ist k entweder reell oder rein imaginär.

---

1) Wir sind auch der Frage nachgegangen, ob es Betragflächen mit $H(z) = H_0 \neq 0$ gibt. Leider sind wir dabei zu keinem Ergebnis gelangt.

Die zugehörigen Betragflächen sind Schiebflächen, wobei die Schiebkurven in den Koordinatenebenen $x = \text{const}$ bzw. $y = \text{const}$ liegen.
Zwar ist es uns nicht gelungen, eine Übersicht über alle Schiebflächen unter den Betragflächen zu erhalten, dennoch erweisen sich die Betrachtungen der speziellen Schiebflächen mit $w_{xy} = 0$ auch in einem allgemeinen Zusammenhang als bedeutsam. Der Beweis von Satz 8 legt nämlich die Beschäftigung mit einer gewissen Differentialgleichung für die logarithmische Ableitung von f nahe. Dazu beweisen wir

Satz 9: Die Betragflächen der Lösungen von

$$\left[\frac{f'}{f}\right]' + \frac{1}{2}\left[\frac{f'}{f}\right]^2 + \frac{1}{2}c(z) = 0$$

tragen jeweils ein konjugiertes Netz, dessen Projektion gegeben ist durch $\mathrm{Re}(g(z)) = \text{const}$ und $\mathrm{Im}(g(z)) = \text{const}$, wobei $g'^2(z) = c(z)$ ist.

Hieraus folgt aber, daß wir stets durch eine holomorphe Funktion $z = x(u,v) + iy(u,v)$ die Gaußschen Parameter x und y der Betragfläche so transformieren können, daß die Parameterlinien $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ ein konjugiertes Netz bilden.
Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit den Höhen- und Fallinien der Betragflächen in bezug auf die x,y - Ebene, deren Projektionen durch $|f(z)| = \text{const}$ und $\arg f(z) = \text{const}$ gegeben sind. Darüberhinaus befassen wir uns mit den Kurven, die zu den Höhen- bzw. Fallinien konjugiert sind. Ihre Projektionen sind durch $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ bzw. $|f'(z)| = \text{const}$ gegeben.
Reimerdes beschäftigt sich in seiner Arbeit [XIX] mit den Höhen- und Fallinien auf Flächen im allgemeinen und mit den Höhen- und Fallinien der Betragflächen im besonderen. Dabei leitet er partielle Differentialgleichungen her, die die Flächen charakterisieren, auf denen die Höhen- oder Fallinien gewisse differentialgeometrische Besonderheiten aufweisen. Merkwürdigerweise untersucht er diese Differentialgleichungen nicht im Zusammenhang mit Betragflächen. Diese Lücke schließen wir in den ersten beiden Paragraphen. Dort beweisen wir zunächst Satz 11 und Satz 12.

Satz 11: Die einzigen Betragflächen, deren Fallinien zugleich geodätische Linien sind, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{az+b}$ und die Rotationsflächen zu $f(z) = (az + b)^{\alpha}$.

Diese Betragflächen sind auch die einzigen, auf denen das Netz der Krümmungslinien zusammenfällt mit dem Netz der Höhen- und Fallinien. Ferner sind sie die einzigen, bei denen die Projektionen der Fallinien eine Geradenschar bilden.

Satz 12: Die einzigen Betragflächen, deren Höhenlinien zugleich asymptotische Linien sind, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{\alpha z + b}$ und die geraden Konoide zu $f(z)=(az+b)^{i\beta}$.

Die den Sätzen 11 und 12 zugrunde liegenden Differentialgleichungen von Reimerdes werden von uns auch allgemein untersucht. Dadurch ergibt sich ein tieferes Verständnis für die Ergebnisse aus Satz 11 und 12 und ein einfacher Zugang zu den Realteil- bzw. Imaginärteilflächen mit den entsprechenden Eigenschaften (siehe dazu Satz 13).
Erst das Zusammenfallen der einen Schar asymptotischer Linien mit den Fallinien führt zu Betragflächen, die nicht schon im ersten Kapitel aufgetreten sind; denn es gilt
Satz 15: Die einzigen Betragflächen, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind, sind die Potenzbetragflächen zu $f(z) = (az + b)^{\alpha + i\beta}$ mit $\alpha^2+\beta^2 = \alpha$.

Auch die zu Satz 15 führende Differentialgleichung von Reimerdes wird von uns allgemein untersucht. Das führt zu einer geometrischen Charakterisierung der genannten Potenzbetragflächen. Ferner zeigen wir, daß die bekannten Wendelflächen die einzigen Imaginärteilflächen sind, bei denen die Fallinien mit einer Schar asymptotischer Linien zusammenfallen (Satz 14). Schließlich gelangen wir durch die allgemeinen Betrachtungen zwanglos zu einem sehr einfachen Beweis des Satzes von E.Catalan: Die Wendelflächen sind die einzigen nicht ebenen Regelflächen unter den Minimalflächen.

Damit sind die von Reimerdes aufgeworfenen Fragestellungen für die Betragflächen vollständig beantwortet. In den nächsten Paragraphen geht es um Problemstellungen, die durch die bisherigen Ergebnisse initiiert werden.
In §3 bestimmen wir zunächst die Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden. Beispiele für derartige Betragflächen kennen wir aus Satz 11. Bemerkenswerterweise kommen nur noch die Potenzbetragflächen aus Satz 15 hinzu; denn es gilt

Satz 16: Die einzigen Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{\alpha z + b}$ und die Rotationsflächen zu $f(z) = (az + b)^{\alpha}$ und die Potenzbetragflächen zu $f(z) = (az + b)^{\alpha + i\beta}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha$.

Auf neue Betragflächen stoßen wir, wenn wir fordern, daß die Fallinien wie bei den Rotationsflächen durchweg ebene Kurven sein sollen. Hierzu beweisen wir

Satz 17: Die Betragfläche zu $\omega = f(z)$ trägt genau dann ebene Fallinien, wenn die Umkehrfunktion gegeben ist durch
$z = \omega_2 \omega^k + \omega_1 \omega + \omega_0$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $(\omega_1, \omega_2) \neq (0,0)$ bzw.
$z = \omega_2 \log \omega + \omega_1 \omega + \omega_0$ mit $\omega_2 \neq 0$ bzw.
$z = \omega_2 \omega \log \omega + \omega_1 \omega + \omega_0$ mit $\omega_2 \neq 0$.

In §4 befassen wir uns mit einem Problem, das etwa durch $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ad - bc \neq 0$, aber auch durch die bekannte Betragfläche zu $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ oder schließlich durch die mehrfach aufgetretenen Rotationsflächen und geraden Konoide ins Blickfeld gerückt wird. Wir fragen also nach den Betragflächen, bei denen die Höhenlinien- oder Fallinienprojektionen kreisförmig sind. Dann zeigen wir, daß ihre Gesamtheit charakterisiert ist durch die Differentialgleichung

$$\frac{f}{f'}\left[\frac{f}{f'}\right]'' - \frac{1}{2}\left[\frac{f}{f'}\right]^2 = k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \ .$$

Diese Differentialgleichung wird integriert (II,§4,(3)), und das führt zu

Satz 18: Die Höhenlinien einer Betragfläche sind genau dann kreisförmig, wenn die Fallinienprojektionen kreisförmig sind. Die Gesamtheit der Betragflächen mit dieser Eigenschaft ist durch (3) gegeben. Die Höhenlinien- und Fallinienprojektionen sind dabei stets konjugierte Kreisbüschel, und alle vier Typen dieser Kreisbüschelpaare treten dabei auf.

Im letzten Paragraphen der Arbeit beschäftigen wir uns mit der allgemeinen Potenz. Bei den vorangegangenen Erörterungen sind wir wiederholt auf spezielle Potenzbetragflächen gestoßen. Nun geht es darum, Eigenschaften zu ermitteln, die möglichst allen Potenzbetragflächen und möglichst nur diesen zukommen. Dazu beweisen wir unter anderem

Satz 19: Die einzigen Betragflächen, bei denen die Kurvenscharen $\arg f(z) = \text{const}$ und $|f'(z)| = \text{const}$ sich unter festem Winkel schneiden bzw. zusammenfallen, sind die Betragflächen zur allgemeinen Potenz mit $f'' \not\equiv 0$ und die zur Exponentialfunktion $f(z) = e^{az+b}$.

Ferner gilt

Satz 21: Die einzigen Betragflächen, bei denen die Kurvenscharen $|f(z)| = \text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ sich unter festem Winkel schneiden bzw. zusammenfallen, sind die Betragflächen zur allgemeinen Potenz.

In diesen Zusammenhang gehört auch

Satz 23: f sei eine holomorphe Funktion mit $f'' \not\equiv 0$. $\hat{F}$ sei die Betragfläche zu f', $\check{F}$ sei die Betragfläche zu $\frac{f'}{f}$. Dann schneiden sich die Projektionen der Höhenlinien von $\hat{F}$ und die Projektionen der Fallinien von $\check{F}$ genau dann unter einem festen Winkel, wenn $f(z) = (az + b)^{\alpha+i\beta}$ ist.

Für den Winkel $\sigma_1(z)$, den die durch z laufende Kurve aus der Schar der Fallinienprojektionen mit der durch z laufenden Kurve aus der Schar der Projektionen der zu den Fallinien konjugierten Flächenkurven bildet, leiten wir die Formel

$$m_1(z) = \tan \sigma_1(z) = -\frac{\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}\right)} \quad \text{her(II,§5,(27))}.$$

Damit wird der f zugeordnete Differentialausdruck $\frac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} = c(z)$, der bei den Krümmungsbetrachtungen von Ullrich [XXIV] eine entscheidende Rolle spielte, in einen neuen einfachen Zusammenhang mit der Betragfläche gebracht.

Wir beschließen unsere Untersuchungen mit

Satz 24: Schneiden sich bei der nicht abwickelbaren Fläche $w = w(x,y)$ sowohl die Kurven $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ und die Höhenlinienprojektionen als auch die Kurven $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ und die Fallinienprojektionen jeweils unter festem Winkel, so kann die Fläche entweder als Realteilfläche zu $f(z) = (\alpha+i\beta)\log(z-z_0)$ oder als Betragfläche zu $f(z) = z_1(z - z_0)^{\alpha+i\beta}$ aufgefaßt werden.

Es sei noch angemerkt, daß sich die in dieser Arbeit benutzten Beweisideen und -verfahren auch dafür eignen, die analo-

gen Fragestellungen für Realteilflächen zu bearbeiten. So erhält man etwa auf dem gleichen Wege wie in I,§2 die folgenden Sätze:

Die einzigen Rotationsflächen unter den Realteilflächen sind die Realteilflächen zu $f(z) = \alpha \log (z - z_0) + z_1$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$.

Die einzigen Schraubenflächen unter den Realteilflächen sind die Realteilflächen zu $f(z) = (\alpha + i\beta) \log (z - z_0) + z_1$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$.

Eine ausführliche Darstellung dieser Sachverhalte bzgl. der Realteilflächen ist in einer späteren Arbeit geplant.

Es ist mir an dieser Stelle ein freudiges Anliegen, mich für die Unterstützung und Betreuung dieser Arbeit bei meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Heinrich Begehr, zu bedanken.

§2 Die Schraubenflächen, insbesondere die Rotationsflächen, unter den Betragflächen

2.1 Vorbetrachtungen

Bei der Beschäftigung mit Betragflächen stößt man unter anderem auf die Frage, ob sich eine bestimmte Fläche als Betragfläche deuten läßt, oder allgemeiner, welche Elemente einer Flächenklasse zugleich Betragflächen sind. So hat Ullrich in XXIV alle Torsen unter den Betragflächen bestimmt. Ferner hat Ullrich in der gleichen Arbeit die geometrische Gestalt der Betragflächen zur allgemeinen Potenz untersucht und dabei festgestellt, daß einige von ihnen Rotationsflächen sind. Es stellt sich daher die Frage, ob durch die Beispiele von Ullrich bereits alle Rotationsflächen unter den Betragflächen erfaßt sind. Dieser Frage wollen wir nachgehen. Vorab soll ein einfaches Beispiel besprochen werden, an dem die Untersuchungsmethode recht deutlich wird. Wir stellen uns die Aufgabe, die Kegelflächen unter den Betragflächen zu bestimmen.

Es sei ein Kegel mit der Spitze im Punkt P_0 gegeben (Abb. 1). Die Erzeugende durch P hat den Richtungsvektor $\varphi - \varphi_0$. Ist w der Richtungsvektor der Flächennormalen im Punkt P , so gilt

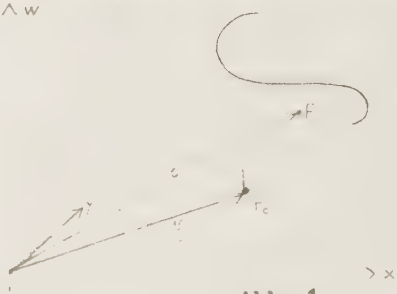


Abb. 1

1. $(\varphi - \varphi_0)w = 0$. Mit
2. $\varphi = (x,y,w)$, $\varphi_0 = (a,b,c)$, $w = (w_x, w_y, -1)$

erhalten wir aus 1. die Differentialgleichung

3. $(x-a)\cdot w_x + (y-b)\cdot w_y = w-c$.

Daß auch umgekehrt jede Integralfläche von 3. ein Kegel ist, zeigt Kamke in seinem Lehrbuch XI durch das Studium der Charakteristiken.

Hat 3. eine Betragsfunktion $w = f(z)$ als Lösung, so folgt aus

4. $\frac{w_x}{w} = \mathrm{Re}\,(\frac{f'}{f})$, $\frac{w_y}{w} = -\mathrm{Im}\,(\frac{f'}{f})$, $z_0 = a+ib$

5. $(x-a)\frac{w_x}{w} + (y-b)\frac{w_y}{w} = \mathrm{Re}\,((z-z_0)\frac{f'}{f})$.

Also gilt

6. $\mathrm{Re}\,((z-z_0)\frac{f'}{f}) - 1 = -\frac{c}{|f|}$.

Sei zunächst $c \neq 0$. Dann folgt aus 6., daß $\left|\frac{1}{f}\right|$ in G harmonisch ist. Dann ist aber $f \equiv \text{const}$.
Ist hingegen $c = 0$, so folgt aus 6.

7. $(z-z_0)\,\frac{f'}{f} = 1 + i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.

Daraus ergibt sich
8. $f(z) = z_1 \cdot (z-z_0)^{1+i\beta}$.

Für $\beta = 0$ ergibt sich ein gerader Kreiskegel.
Für $\beta \neq 0$ kann die Betragfläche als Kegel der logarithmischen Spirale gedeutet werden, wie Ullrich anmerkt.
Das Entscheidende an unserem Beispiel war, daß der Differentialgleichung 3. notwendig alle expliziten Darstellungen $w = w(x,y)$ einer Kegelfläche genügen mußten und daß wir aus der partiellen Differentialgleichung 3. die gewöhnliche Differentialgleichung 7. für $f(z)$ gewinnen konnten.

Ehe wir mit der eigentlichen Untersuchung beginnen, ist noch eine für die späteren Beweisführungen wichtige Bemerkung zum räumlichen Koordinatensystem zu machen (Abb. 2).
Es sei eine Betragfläche F zu $f(z)$ gegeben. Für den Augenblick dieser Betrachtung unterscheiden wir zwischen den kartesischen Koordinaten x und y und den Größen Re(z) und Im(z), die als Gaußsche Flächenparameter dienen, indem wir $z = u + iv$ setzen. F hat also bzgl. des x,y,w - Systems die Darstellung

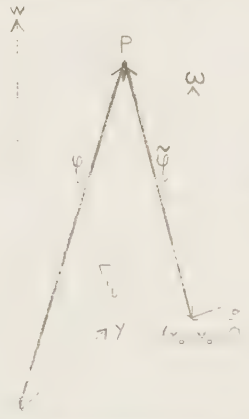


Abb. 2

1. $\varphi = \varphi(u,v) = (u,v,|f(z)|)$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß es eine analytische Funktion $g(\zeta)$ ($\zeta = \tilde{u} + i\tilde{v}$) derart gibt, daß F auch bzgl. des ξ,η,ω-Systems als Betragfläche von $g(\zeta)$ aufgefaßt werden kann, also die Darstellung
2. $\tilde{\varphi} = (\tilde{u},\tilde{v},|g(\zeta)|)$ hat.

Dabei sollen die ξ - und η - Achse in der x,y - Ebene liegen, die ω - Achse soll wie die w- Achse gerichtet sein, so wie es die Abb.2 zeigt.

Wir transformieren zunächst die Flächenparameter u und v durch

$$u = \tilde{u}\cdot\cos\alpha - \tilde{v}\cdot\sin\alpha + x_0 \,,$$

3. $$v = \tilde{u}\cdot\sin\alpha + \tilde{v}\cdot\cos\alpha + y_0 \,,$$

also ist

4. $z = \zeta e^{i\alpha} + z_0$ und setzen $g(\zeta) = f(\zeta e^{i\alpha} + z_0)$.

Dann erhalten wir für F im x,y,w - System die Darstellung

5. $\varphi = (\tilde{u}\cos\alpha - \tilde{v}\sin\alpha + x_0,\ \tilde{u}\sin\alpha + \tilde{v}\cos\alpha + y_0,\ |g(\zeta)|)$.

Jetzt transformieren wir die kartesischen Koordinaten durch

$$\xi = (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha \,,$$

6. $$\eta = -(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \,,$$

$$\omega = w$$

und erhalten für F im ξ,η,ω - System die gewünschte Darstellung

7. $\tilde{\varphi} = (\tilde{u},\ \tilde{v},\ |g(\zeta)|)$, $\zeta = \tilde{u} + i\tilde{v}$.

Eine Transformation der hier beschriebenen Art werden wir im folgenden kurz als "zulässige Transformation" bezeichnen.

2.2 Die Rotationsflächen unter den Betragflächen

Die Rotationsflächen sind einerseits von praktischem Interesse, andererseits sind sie auch im Rahmen der Differentialgeometrie Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. So hat man sich etwa einen vollständigen Überblick über die Rotationsflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung verschafft. Unter diesen sind so wichtige Flächen wie die Kugel und die Pseudosphäre. In der Differentialgeometrie ist die folgende Parameterdarstellung gebräuchlich:

F: $\varphi = \varphi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ f(u))$.

Die Flächenparameter können hierbei als Polarkoordinaten in der x,y-Ebene gedeutet werden, so daß der genannten Parameterdarstellung die explizite Darstellung

$$w = g(x^2 + y^2)$$

entspricht.

Man hat hier, um eine möglichst handliche Darstellung zu gewinnen, die Achse $\mathcal{G}$ von F mit der w-Achse zusammenfallen lassen. Das dürfen wir bei unserer Untersuchung nicht ausschließlich tun; denn dann würden wir doch nur, analytisch formuliert, die Frage untersuchen, ob es Betragsfunktionen

derart gibt, daß

$$|f(z)| = g(|z|^2)$$

gilt.

Wir müssen davon ausgehen, daß unter den möglichen expliziten Darstellungen $w = w(x,y)$ einer fest vorgegebenen Rotationsfläche F sich erst bei einer bestimmten Achsenlage eine Betragsfunktion finden läßt. Erst wenn wir wissen, daß, egal wie die Achse im Raum liegt, sich unter den expliziten Darstellungen von F keine Betragsfunktion finden läßt, wissen wir, daß F nicht als Betragsfläche gedeutet werden kann.

Für die Lage der Achse $\mathfrak{g}$ im Raum gibt es genau zwei Möglichkeiten.

A: $\mathfrak{g}$ schneidet die x,y-Ebene in genau einem Punkt.

B: $\mathfrak{g}$ ist parallel zur x,y-Ebene bzw. fällt ganz in die x,y - Ebene.

Im Fall A können wir nach 2.1 o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{g}$ durch den Ursprung des Koordinatensystems geht und in der x,w - bzw. y,w- Ebene liegt.

Im Fall B können wir, gleichfalls nach 2.1, o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{g}$ in der x,w- bzw. y,w-Ebene liegt.

Zu A:

Es sei F eine Rotationsfläche mit der Achse $\mathfrak{g} = t \cdot \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = (a,b,c) \neq \mathfrak{o}$, und P sei ein Punkt auf F (Abb. 3), der nicht auf $\mathfrak{g}$ liegt. Die durch P laufende Meridiankurve γ liegt in der Ebene E, die durch den Ursprung geht und von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ aufgespannt wird. Die Flächennormale von F im Punkt P ist zugleich die Normale von γ in P. Mithin liegt die Flächennormale in E. Ist $\mathfrak{n}$ ein Vektor in Richtung der Flächennormalen, so sind demnach die Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ komplanar. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt $(\mathfrak{a}\ \mathfrak{p}\ \mathfrak{n})$ verschwindet, also

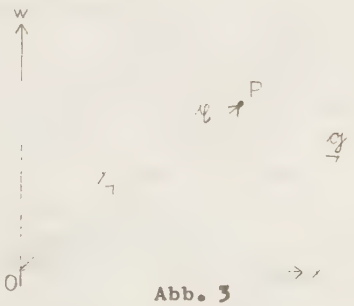


Abb. 3

1. $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{n} = 0$ gilt.

Die Beziehung 1. läßt noch eine andere geometrische Deutung zu, die für die Übertragung der hier gemachten Überlegungen auf andere Flächenklassen günstiger ist; denn der Vektor $\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{p}$ steht senkrecht auf der Meridianebene E und zeigt

somit in die Richtung der Tangente des durch P laufenden Breitenkreises von F. Somit muß $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{m} = 0$ sein. Mit $\mathfrak{p} = (x,y,w)$, $\mathfrak{m} = (w_x, w_y, -1)$ folgt aus 1.

(1) $(bw - cy)\cdot w_x + (cx - aw)\cdot w_y = ay - bx$.

Zu B:

Es sei F eine Rotationsfläche mit der Achse $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} + t\cdot\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{d} = (0,0,d) \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a} \equiv (a,0,0) \neq \mathfrak{o}$, und P sei ein Punkt auf F, der nicht auf $\mathfrak{g}$ liegt (Abb. 4). Dann wird die Ebene E, von der schon im vorangegangenen Fall die Rede war, aufgespannt von $\mathfrak{n} = \mathfrak{p} - \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$, und die Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$ müssen komplanar sein, d.h. es gilt

4. $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{n})\cdot\mathfrak{m} = 0$,

und dies führt auf

(2) $(d - w)\cdot w_y = y$.

Daß der Parameter a herausfällt ist verständlich, da man ja $\mathfrak{a}$ als Einheitsvektor wählen könnte.

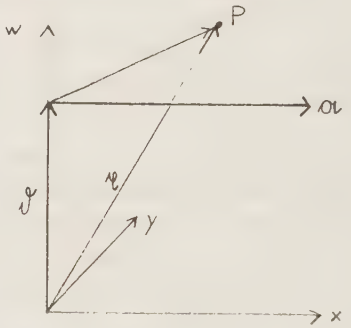


Abb. 4

Daß umgekehrt jede Lösung von (1) eine (stetig differenzierbare) Rotationsfläche mit der angegebenen Achsenlage ist, zeigt wieder Kamke durch das Studium der Charakteristiken in seinem Lehrbuch [XI] . Daß dies auch für die Lösungen von (2) gilt, zeigt man auf dem gleichen Wege.

Wir kommen zur Untersuchung von (1) im Hinblick darauf, ob unter ihren Lösungen Betragsfunktionen sind. Wie bereits erwähnt, können wir entweder a=0 oder b=0 annehmen. Wir setzen b=0, legen also die Achse in die x,w-Ebene und erhalten

(3) $-cy\cdot w_x + (cx - aw)\cdot w_y = ay$.

Durch (3) wird der Fall A im Hinblick auf unsere Untersuchung erschöpfend erfaßt.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall

(a) a=0.

Im Falle (a) ist wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ sicher $c \neq 0$, und wir erhalten

1. $-yw_x + xw_y = 0$. In diesem Fall fällt $\mathfrak{g}$ mit der w-Achse zusammen. Beim Übergang zu Polarkoordinaten wird aus 1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$, was geometrisch verständlich ist. 2.könnten

wir direkt integrieren. Doch merkwürdigerweise hilft einem bei der Untersuchung von Betragflächen die Lösung einer partiellen Differentialgleichung nicht soviel wie die Differentialgleichung selber. So ist es auch hier. Wir bleiben bei 1. und nehmen an, 1. hätte eine Betragsfunktion $w = |f(z)| \not\equiv \text{const}$ als Lösung. Dann gilt

3. $\frac{w_x}{w} = \mathrm{Re}(\frac{f'}{f})$, $\frac{w_y}{w} = -\mathrm{Im}\,(\frac{f'}{f})$ mit $z = x + iy$, und aus 1. und 3. erhalten wir

4. $y \cdot \frac{w_x}{w} - x \cdot \frac{w_y}{w} = \mathrm{Im}\,(z \cdot \frac{f'}{f}) = 0$. Daraus folgt

5. $z \frac{f'}{f} = \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aus 5. ergibt sich sofort

6. $f(z) = \tilde{z}_1 z^{\alpha}$ mit $\tilde{z}_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Bedenken wir die Ausführungen in 2.1 und setzen wir $z = e^{i\alpha}\zeta + \tilde{z}_0$, um dann für ζ wieder z zu schreiben und die Konstanten entsprechend umzubenennen, so können wir sagen: Die einzigen holomorphen Funktionen, die zu Rotationsflächen führen, deren Achse jeweils senkrecht auf der z-Ebene steht, sind die Funktionen

$$f(z) = (z_1 z + z_0)^{\alpha} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ z_0, z_1 \in \mathbb{C},\ z_1 \neq 0 .$$

Die Betragflächen dieser Funktionen sind die Rotationsflächen, die Ullrich erwähnt hat. Es sind die einzigen Rotationsflächen unter den Potenzbetragflächen, d.h. den Betragflächen zur allgemeinen Potenz

$$f(z) = (z_1 z + z_0)^{\alpha + i\beta} .$$

Ihre Rotationsachse durchstößt die x,y-Ebene im Punkte $z_2 = -\frac{z_0}{z_1}$. Ihre Meridiane liegen in den Ebenen durch z_2 senkrecht zur x,y-Ebene, und sie lassen sich (bei passender Koordinatenwahl) dort durch die Gleichung

$$w = c \cdot t^{\alpha},\ c>0,\ t \in (0,\infty)$$ beschreiben.

Als nächstes untersuchen wir den Fall

(b) $a \neq 0$. Nehmen wir an, (3) hätte eine Lösung $w = |f(z)|$ mit holomorphem f, so gelangen wir von (3) unmittelbar zu

1. $-\frac{c}{a}\,\mathrm{Im}\,(z \cdot \frac{f'}{f}) = \frac{y}{w} + w_y$.

Folglich muß die Funktion

2. $h = \frac{y}{w} + w_y$ harmonisch sein, d.h. es muß

3. $\Delta h = 0$ gelten. Es ist

4. $h_{xx} = -y\frac{w_{xx}}{w^2} + 2y\frac{w_x^2}{w^3} + w_{xxy}$ und

5. $h_{yy} = -2\frac{w_y}{w^2} - y\frac{w_{yy}}{w^2} + 2y\frac{w_y^2}{w^3} + w_{yyy}$, so daß

6. $\Delta h = -\frac{y}{w^2}(w_{xx}+w_{yy}) + \frac{2y}{w^3}(w_x^2+w_y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(w_{xx}+w_{yy}) - \frac{2w_y}{w^2}$ ist.

Jede Betragsfunktion genügt

7. $w(w_{xx}+w_{yy}) = w_x^2+w_y^2$. Dies führt mit 6. zu

8. $\Delta h = \frac{y}{w^2}(w_{xx}+w_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x^2+w_y^2}{w}\right) - \frac{2w_y}{w^2}$. Ferner ist

9. $w_x^2 + w_y^2 = |f'(z)|^2$, $w_{xx} + w_{yy} = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|}$.

Folglich gilt

10. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x^2+w_y^2}{w}\right) = \frac{2|f'|\,|f'|_y w - |f'|^2 w_y}{w^2}$.

Berücksichtigen wir außerdem 3. $\Delta h = 0$ und

11. $|f'|_y = -|f'|\,\mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'}\right)$, $w_y = -|f|\,\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right)$, so erhalten wir

12. $2|f|\,\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) + y\cdot\frac{|f'|^2}{|f|} - 2|f'|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'}\right)\cdot|f| + |f'|^2\cdot|f|\,\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) = 0$. Mit

13. $\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) = -\frac{|f'|^2}{|f|^2}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{f}{f'}\right)$ erhalten wir aus 12.

14. $\frac{|f'|^2}{|f|}\left(y - 2\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{f}{f'}\right)\right) + |f|\,|f'|^2\left(\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) - 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'}\right)\right) = 0$.

Daraus folgt schließlich

15. $\frac{1}{|f^2|}\,\mathrm{Im}\left(z - 2\frac{f}{f'}\right) = \mathrm{Im}\left(2\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}\right)$.

Aus formalen Gründen schreiben wir die letzte Beziehung unter Berücksichtigung von

16. $\mathrm{Re}\left(i\left(z - 2\frac{f}{f'}\right)\right) = -\mathrm{Im}\left(z - 2\frac{f}{f'}\right)$ noch um und kommen zu

(4) $\left|\frac{1}{f^2}\right|\cdot\mathrm{Re}\left(i\left(z - 2\frac{f}{f'}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f} - 2\frac{f''}{f'}\right)$.

An dieser Stelle unterbrechen wir unsere Untersuchung, um eine Hilfsbetrachtung durchzuführen. Durch die Beziehung (4) hat sich unser Problem doch offensichtlich auf die folgende Frage reduziert:

Es sei $F = F(z)$, $z = x+iy$, holomorph im Gebiet G. $u=u(x,y)$ sei harmonisch in G. Wann ist $g=g(x,y) = |F(z)|\,u(x,y)$ harmonisch?

Es ist

1. $\Delta g = u\cdot\Delta|F| + 2\{|F|_x u_x + |F|_y u_y\} + |F|\cdot\Delta u$.

Aus 1. folgt, da nach Voraussetzung $\Delta u = 0$ ist,

2. $\Delta g = u\cdot\Delta|F| + 2\{|F|_x u_x + |F|_y u_y\}$.

Somit erhalten wir: g ist genau dann harmonisch, wenn

3. $u\cdot\Delta|F| + 2\{|F|_x u_x + |F|_y u_y\} = 0$ ist.

Unter Berücksichtigung von

4. $|F|_x = |F|\,\mathrm{Re}(\frac{F'}{F})$, $|F|_y = -|F|\,\mathrm{Im}(\frac{F'}{F})$ und

5. $\mathrm{Re}(\frac{F'}{F}) = \frac{|F'|^2}{|F|^2}\,\mathrm{Re}(\frac{F}{F'})$, $\mathrm{Im}(\frac{F'}{F}) = -\frac{|F'|^2}{|F|^2}\cdot\mathrm{Im}(\frac{F}{F'})$ und

6. $\Delta|F| = \frac{|F'|^2}{|F|}$ folgt aus 3.

7. $\frac{|F'|^2}{|F|}\cdot\left\{u + 2\left[\mathrm{Re}(\frac{F}{F'})u_x + \mathrm{Im}(\frac{F}{F'})u_y\right]\right\} = 0$.

Bei der Umformung haben wir den trivialen Fall $F \equiv \text{const}$ stillschweigend ausgeschlossen.

Da u harmonisch ist, gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f}$ derart, daß $u = \mathrm{Re}(\tilde{f})$ ist. Dann ist aber

8. $u_x = \mathrm{Re}(\tilde{f}')$, $u_y = -\mathrm{Im}(\tilde{f}')$, so daß wir

9. $\frac{|F'|^2}{|F|}\cdot\mathrm{Re}(\tilde{f} + 2\tilde{f}'\cdot\frac{F}{F'}) = 0$ erhalten.

Aufgrund von 9. können wir demnach sagen:

Die Funktion $g = |F|u$ ist unter den genannten Voraussetzungen über F und u genau dann harmonisch, wenn entweder $F \equiv \text{const}$ ist oder

1o. $\tilde{f} + 2\tilde{f}'\cdot\frac{F}{F'} = ik$ mit $k \in \mathbb{R}$, $u = \mathrm{Re}(\tilde{f})$ gilt.

Aus 1o. liest man unmittelbar ab, daß

11. $\tilde{f} \equiv \text{const} \Longleftrightarrow \tilde{f} \equiv ik$ gilt.

Das führt auf den zweiten trivialen Fall

12. $u(x,y) \equiv 0$.

Sei nun $\tilde{f} \not\equiv \text{const}$. Multiplikation von 1o. mit $\frac{F'}{F}$ führt direkt auf

13. $\frac{F'}{F} + 2\,\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}-ik} = 0$. Integration von 13. ergibt

14. $F = \frac{z_0}{(\tilde{f}-ik)^2}$.

Drücken wir $\tilde{f}$ durch F aus, so erhalten wir

15. $\tilde{f} = \frac{z_1}{\sqrt{F}} + ik$ mit $z_1 = \sqrt{z_0}$ und damit

16. $u = \mathrm{Re}(\tilde{f}) = \mathrm{Re}(\frac{z_1}{\sqrt{F}})$. Für die Funktion g erhalten wir die Darstellungen

17. $g = |z_0|\,\mathrm{Re}(\sqrt{\frac{F}{z_0}}) = |z_0|\,\mathrm{Re}(\frac{1}{\tilde{f}-ik})$.

Wir fassen das Ergebnis in einem Lemma zusammen.

Lemma: Die Funktion $g = |F|\,\mathrm{Re}(\tilde{f})$ mit holomorphem F und $\tilde{f}$ ist genau dann harmonisch, wenn einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

$F \equiv$ const und $\tilde{f}$ beliebig;

F beliebig und $\tilde{f} \equiv ik$ mit $k \in \mathbb{R}$;

$F = \frac{z_0}{(\tilde{f}-ik)^2}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Wenden wir das Lemma auf die Beziehung (4) an, so brauchen wir, da $F=\frac{1}{f^2}$ ist, nur die letzten beiden Fälle zu berücksichtigen.

Sei zunächst $\tilde{f} \equiv ik$ mit $k \in \mathbb{R}$. Nach (4) haben wir andererseits $\tilde{f} = i(z-2\frac{f}{f'})$ zu setzen. Damit erhalten wir $\frac{f'}{f} = \frac{2}{z-k}$, also $f(z) = z_1(z-k)^2$. Diese Funktion ist bereits im Fall (a) aufgetreten. Ihre Betragfläche ist ein Rotationsparaboloid, dessen Achse senkrecht auf der x,y-Ebene steht. Die zugehörige Betragsfunktion kann somit keine Lösung der Differentialgleichung (3) im Fall (b) sein.

Sei nun $F = \frac{z_0}{(\tilde{f}-ik)^2}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Nach (4) haben wir

$F = \frac{1}{f^2}$ und $\tilde{f} = i(z- 2\frac{f}{f'})$ zu setzen. Daraus folgt direkt

1. $f(z) = z_1\left[(z-2\frac{f}{f'})-k\right]$, $z_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Also ist

2. $\mathrm{Re}\,(i\frac{f}{z_1}) = \mathrm{Re}\,(i\,(z-2\frac{f}{f'}))$. Daraus folgt nach (4)

3. $\mathrm{Im}(\frac{f'}{f} - 2\frac{f''}{f'}) = \left|\frac{1}{f^2}\right| \cdot \mathrm{Re}(i\frac{f}{z_1}) = \left|\frac{1}{z_1^2}\right| \cdot \mathrm{Im}(\frac{z_1}{f})$.

Somit erhalten wir

4. $\frac{z_1}{f}\cdot\frac{1}{|z_1^2|} + 2\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} = K$ mit $K \in \mathbb{R}$ und daraus

5. $f\cdot\overline{z_1} = \frac{1}{K+\frac{f'}{f}-2\frac{f''}{f'}}$.

Aus 1. folgt durch Differentiation

6. $f' = z_1\,(\,2\frac{ff''}{f'^2} - 1)$.

Multiplikation von 6. mit $\frac{f'}{f}$ führt auf

7. $\frac{f'^2}{fz_1} = 2\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}$. 7. eingesetzt in 5. liefert

8. $\overline{z_1}Kf - \frac{\overline{z_1}}{z_1}\cdot f'^2 = 1$.

Für $K=0$ besagt 8., daß $f' \equiv$ const gilt. Dann ist $f(z)=z_0 z+\zeta_0$. Wir erhalten wieder eine Funktion, die schon im Fall (a) auftrat. Deren Betragfläche ist ein gerader Kreiskegel, dessen Achse senkrecht auf der x,y-Ebene steht. Die zugehörige Betragsfunktion kann keine Lösung der Differentialgleichung (3)

im Fall (b) sein.
Für K=0 erhalten wir direkt aus 8.

9. $\frac{f'}{\overline{Kz_1 f - \frac{z_1}{\bar{z}_1}}} = 1$. Die Integration führt zu

10. $\overline{Kz_1 f - \frac{z_1}{\bar{z}_1}} = \frac{Kz_1}{2} z + \tilde{z}_2$, woraus schließlich

11. $f(z) = \frac{Kz_1}{4} \cdot (z+z_2)^2 + \frac{1}{K \cdot \bar{z}_1}$ folgt.

Auch diese Funktion scheidet aus; denn man rechnet leicht nach, daß f(z) nicht 6. genügt. Mithin können wir sagen:
Die Differentialgleichung
(3) $-cyw_x + (cx - aw)\, w_y = ay$ hat für $a \neq 0$ keine Betragsfunktion als Lösung.
Wir kommen nun zur Untersuchung von
(2) $(d-w)\, w_y = y$ mit $d \neq 0$ im Hinblick darauf, ob unter ihren Lösungen Betragsfunktionen sind.
Wir nehmen wieder an, (2) hätte eine Lösung $w = |f(z)|$ mit holomorphem f. Aus (2) folgt

$d \cdot \frac{w_y}{w} = \frac{y}{w} + w_y$, also

$-d \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{y}{w} + w_y$.

Setzen wir wieder
$h = \frac{y}{w} + w_y$, so besagt die obige Beziehung, daß h harmonisch ist.
Dies ist aber schon im Fall (b) untersucht worden. Bedenken wir weiter, daß (2) gerade genau die Rotationsflächen als Integralflächen hat, deren Achse in der x,w-Ebene parallel zur x-Achse liegt, so wird offenbar, daß auch die geometrische Argumentation, die wir im Fall (b) an einer Stelle benutzt haben (K = 0 in 8.), hier zulässig ist. Demnach hat (2) keine Betragsfunktion als Lösung.
Wir können unsere Untersuchung abschließen mit dem
Satz 1: Die einzigen Betragflächen, die gleichzeitig Rotationsflächen sind, sind die Betragflächen zu $f(z) = (z_1 z + z_0)^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$.

Man könnte vermuten, daß man auf weitere Betragflächen mit leicht überschaubarer geometrischer Gestalt stößt, wenn man die Klasse der Rotationsflächen in sinnvoller Weise erweitert. Denkt man an die kinematische Erzeugung der Rotations-

flächen, so liegt es nahe, die Rotation mit einer geeigneten Translation zu koppeln, um so zu einer Verallgemeinerung der Rotationsflächen zu kommen. Dies führt bekanntlich auf die Schraubenflächen, die wir im nächsten Abschnitt betrachten.

2.3 Die Schraubenflächen unter den Betragflächen

Dreht man eine Kurve $\mathfrak{k}$ um eine feste Gerade $\mathfrak{g}$, und verschiebt man $\mathfrak{k}$ gleichzeitig so parallel zu $\mathfrak{g}$, daß die Verschiebungsgeschwindigkeit proportional zur Drehgeschwindigkeit ist, so erzeugt $\mathfrak{k}$ eine (allgemeine) Schraubenfläche F. Die Schnittkurve $\mathfrak{k}$ von F mit einer Ebene durch $\mathfrak{g}$ heißt wieder Meridiankurve. Die Meridiankurven von F sind kongruent. Führt man mit $\mathfrak{k}$ die Schraubenbewegung aus, durch die F erzeugt wurde, so erzeugt $\mathfrak{k}$ gleichfalls F. Also kann man sich o.B.d.A. jede Schraubenfläche durch eine ebene Kurve erzeugt denken.
In der Differentialgeometrie ist die folgende Parameterdarstellung gebräuchlich,

(5) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = (u\cdot\cos v,\ u\cdot\sin v,\ p\cdot v + h(u))$.

Die Flächenparameter können wieder als Polarkoordinaten in der x,y-Ebene gedeutet werden. Mithin entspricht (5) die explizite Darstellung

$$w = p\cdot \arctan\frac{y}{x} + g(x^2+y^2) \ .$$

Der Proportionalitätsfaktor p zwischen Drehwinkel und Schubstrecke heißt Schraubparameter.
Man hat, um die handliche Darstellung (5) zu gewinnen, die Achse $\mathfrak{g}$ mit der w-Achse zusammenfallen lassen. Das dürfen wir bei unserer Fragestellung nicht ausschließlich tun; denn dann würden wir nur prüfen, ob es eine analytische Funktion f(z) derart gibt, daß

$$|f(z)| = p\cdot\arg z + g(|z|^2) \quad \text{gilt.}$$

Vielmehr müssen wir wieder davon ausgehen, daß unter den möglichen expliziten Darstellungen $w = w(x,y)$ einer fest vorgegebenen Schraubenfläche F sich erst bei einer bestimmten Achsenlage eine Betragsfunktion finden läßt.
Für die Lage der Achse $\mathfrak{g}$ im Raum gibt es wiederum genau zwei Möglichkeiten.
A: $\mathfrak{g}$ schneidet die x,y-Ebene in genau einem Punkt.
B: $\mathfrak{g}$ ist parallel zur x,y-Ebene bzw. fällt ganz in die x,y-Ebene.
Im Fall A können wir nach 2.1 o.B.d.A. den Durchstoßpunkt passend wählen und ferner annehmen, daß $\mathfrak{g}$ in einer Ebene

liegt, die parallel zur x,w- bzw. y,w - Ebene ist.
Im Fall B können wir o.B.d.A. annehmen, daß g in der x,w - bzw. y,w-Ebene liegt.
Die Darstellung (5) lehrt, daß jede Schraubenfläche eine einparametrige Schar von (gewöhnlichen) Schraubenlinien mit gemeinsamer Achse g und gleicher Ganghöhe $h = 2\pi p$ enthält. Davon werden wir im folgenden entscheidend Gebrauch machen.
Es sei F eine Schraubenfläche mit der Achse $g = f + t\,a$, dem Schraubparameter $p \neq 0$, und P sei ein Punkt von F. Wir bestimmen zunächst das Lot des Ursprunges O auf g und das Lot von P auf g (Abb. 5).

Man erhält:

$$\overrightarrow{OF} = f - \frac{a\,f}{a^2}\,a,$$

$$d = |\overrightarrow{OF}| = \frac{|a \times f|}{|a|},$$

$$\overrightarrow{PF} = f - p + \frac{(p - f)\,a}{a^2}\,a,$$

$$r = |\overrightarrow{PF}| = \frac{|(p - f) \times a|}{|a|}.$$

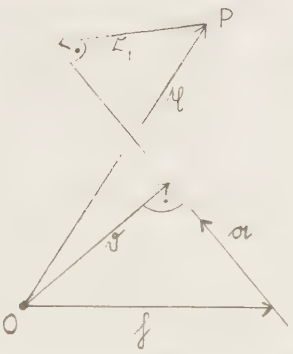


Abb. 5

Wir betrachten die durch P laufende Schraubenlinie und bestimmen die Tangente in P.
(Die folgende Tangentenkonstruktion macht man sich am einfachsten klar, wenn man g mit der w-Achse zusammenfallen läßt. So leitet sie auch Strubecker in seinem Lehrbuch XX ab.)
Wir betrachten die Ebene durch O senkrecht zu g und die Projektion P' von P in die genannte Ebene in Richtung der Schraubachse (Abb. 6). Es ist

$$\overrightarrow{PF_2} = -\overrightarrow{PF_1} \times a = (p - f) \times a,$$

$$\overrightarrow{PP'} = r \cdot \frac{\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_2}|} = \frac{(p - f) \times a}{|a|}.$$

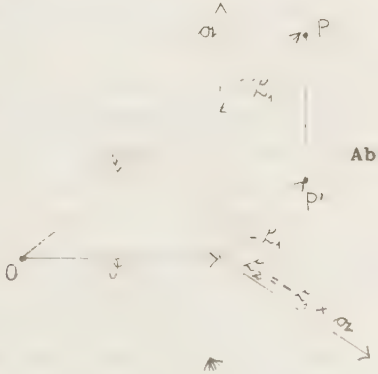


Abb. 6

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ den Richtungsvektor der genannten Tangente, so ist

$$1.\ \mathfrak{A} = p \cdot \frac{a}{|a|} - \mathcal{L} = \frac{1}{|a|}\{p\,a - (p - f) \times a\},$$

(Abb. 7).

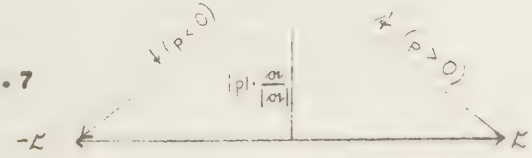


Abb. 7

Ist $\mathfrak{m}$ der Richtungsvektor der Flächennormale im Punkte P, so ist $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{m} = 0$, also

2. $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{o} - \left[(\mathfrak{y} - \mathfrak{f}) \times \mathfrak{o} \right] \cdot \mathfrak{m} = 0$. Mit

3. $\mathfrak{y} = (x,y,w)$, $\mathfrak{o} = (a,b,c)$, $\mathfrak{f} = (h_1, h_2, h_3)$, $\mathfrak{m} = (w_x, w_y, -1)$

erhalten wir

(6) $\left[bw - cy + ch_2 - bh_3 + pa \right] w_x + \left[cx - aw + ah_3 - ch_1 + pb \right] w_y =$
$ay - bx + bh_1 - ah_2 + pc$.

Setzt man

4. $A = ch_2 - bh_3 + pa$, $B = ah_3 - ch_1 + pb$, $C = bh_1 - ah_2 + pc$,

so geht (6) über in

(7) $\left[bw - cy + A \right] w_x + \left[cx - aw + B \right] w_y = ay - bx + C$.

Diese Differentialgleichung betrachtet Kamke in [XI]. Er zeigt durch das Studium der Charakteristiken, daß die Integralflächen von (7) Schraubenflächen sind.

Setzt man

5. $\tilde{\mathfrak{a}} = (A, B, C)$, so ist

6. $\tilde{\mathfrak{o}} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{o} + \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{o}$, und man erhält

7. $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o} \times \tilde{\mathfrak{o}}}{\mathfrak{o}^2}$, $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{o} \cdot \tilde{\mathfrak{o}}}{\mathfrak{o}^2}$.

Sind umgekehrt $\mathfrak{o}$ und $\tilde{\mathfrak{o}}$ vorgegeben, so lassen sich $\mathfrak{f}$ und p derart bestimmen, daß

8. $\tilde{\mathfrak{o}} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{o} + \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{o}$ gilt.

Dabei ist p eindeutig bestimmt zu

9. $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{o} \cdot \tilde{\mathfrak{o}}}{\mathfrak{o}^2}$.

$\mathfrak{f}$ ist bis auf Vielfache von $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt zu

10. $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o} \times \tilde{\mathfrak{o}}}{\mathfrak{o}^2} + \lambda \mathfrak{o}$.

All dies ist nach unseren Ausführungen geometrisch verständlich. Mit anderen Worten, die Differentialgleichungen (6) und (7) sind äquivalent. Wir bleiben bei (6), da wir in dieser Form die uns interessierende Geometrie besser überblicken. Wir wollen (6) daraufhin untersuchen, ob unter ihren Lösungen Betragsfunktionen sind. Wir können, wie bereits angemerkt, o.B.d.A. b=0 annehmen, so daß wir

(8) $\left[-cy + ch_2 + pa \right] w_x + \left[cx - aw + ah_3 - ch_1 \right] w_y = ay - ah_2 + p \cdot c$ erhalten.

Bei (8) liegt die Achse somit in einer zur x,w-Ebene parallelen Ebene.

Wir betrachten jetzt A: $\mathfrak{g}$ schneidet die x,y-Ebene in genau einem Punkt, d.h. es ist $c \neq 0$.

Wir befassen uns zuerst mit dem Fall

(a) $a=0$. Die Achse steht senkrecht auf der x,y-Ebene, und wir können den Durchstoßpunkt in den Ursprung legen. Als Vektor, der vom Ursprung zur Achse führt, ist demnach der Nullvektor geeignet. Wir können also in diesem Fall in (8) $a=h_1=h_2=h_3=0$ setzen. Dann erhalten wir die Differentialgleichung $-yw_x+xw_y = p$. Die Annahme, daß diese Differentialgleichung eine Lösung $w=|f(z)|$ hat, führt direkt zu

$\mathrm{Im}\,(z\cdot\frac{f'}{f}) = \frac{-p}{|f|}$, und dies ist für $p\neq 0$ ein Widerspruch.

Als nächstes ist der Fall

(b) $a\neq 0$ zu untersuchen. Wir legen den Durchstoßpunkt auf die y-Achse, und zwar so, daß sein Ortsvektor $\vec{f}$ gegeben ist durch $\vec{f} = (0, \frac{p\cdot c}{a}, 0)$. Damit erhalten wir aus (8) die Differentialgleichung

$$(-cy + p\,\frac{a^2+c^2}{a})\,w_x + (cx - aw)\,w_y = ay\,.$$

Die Annahme, daß diese Differentialgleichung eine Lösung $w = |f(z)|$ hat, führt auf die Beziehung

$$-c\cdot\mathrm{Im}(z\cdot\frac{f'}{f}) + p\,\frac{a^2+c^2}{a}\,\mathrm{Re}(\frac{f'}{f}) = a\left[\frac{y}{w} + w_y\right].$$

Diese Gleichung besagt, daß

$$h = \frac{y}{w} + w_y$$

eine harmonische Funktion ist. Dies haben wir bereits im Abschnitt 2.2 über Rotationsflächen (Fall(b)) zum Widerspruch geführt.

Damit ist A vollständig erledigt.

Nun zu B: $\mathcal{G}$ ist parallel zur x,y-Ebene, bzw. $\mathcal{G}$ fällt ganz in die x,y-Ebene, d.h. es ist $c=0$.

Legen wir $\mathcal{G}$ in die x,w-Ebene, so können wir $\vec{f} = (0,0,h_3)$ wählen und erhalten aus (8) die Differentialgleichung

$$p\,w_x + (-w+h_3)\,w_y = y.$$

Daraus folgt

$$p\,\frac{w_x}{w} + h_3\cdot\frac{w_y}{w} = \frac{y}{w} + w_y\,.$$

Die Annahme, daß eine Lösung $w = |f(z)|$ existiert, führt unmittelbar dazu, daß

$$h = \frac{y}{w} + w_y$$

harmonisch ist. Dies ist bereits zum Widerspruch geführt worden.

Damit können wir unsere Untersuchung über Schraubenflächen unter den Betragflächen abschließen mit dem

Satz 2: Außer den bereits in Satz 1 aufgezählten Rotationsflächen gibt es keine Schraubenflächen unter den Betragflächen.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns mit Regelflächen befassen und untersuchen, welche von ihnen zugleich Betragflächen sind.

§3 Die Regelflächen unter den Betragflächen

3.1 Vorbetrachtungen

Regelflächen sind diejenigen Flächen, die wenigstens eine einparametrige Schar von Geraden enthalten. Mithin besitzen diese Flächen in bezug auf jedes kartesische Koordinatensystem eine Parameterdarstellung der Form

(1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{w}(u) + v \cdot \mathfrak{z}(u)$.

Die Kurve $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(u)$ heißt eine Direktrix der betreffenden Regelfläche.

In der Wahl der Direktrix hat man eine große Freiheit, von der wir später Gebrauch machen werden. So ist jede Kurve auf der Fläche, die "quer" zu den Erzeugenden verläuft ($\mathfrak{w}' \times \mathfrak{z} \neq 0$) und jede Erzeugende genau einmal schneidet, als Direktrix geeignet. Häufig wird u als Bogenlänge auf der Direktrix und $\mathfrak{z}(u)$ als Einheitsvektor gewählt. Wir wollen das nicht ausschließlich tun, um später einen größeren Spielraum bei der Wahl der Parameter u und v zu haben. Zieht man durch einen beliebigen Raumpunkt die Parallelen zu den Erzeugenden, so erhält man im allgemeinen einen Kegel, den sogenannten Leitkegel der Regelfläche. Gewöhnlich wird der Nullpunkt des kartesischen Koordinatensystems gewählt und die Schnittkurve des Leitkegels mit der Einheitskugel betrachtet. Diese Kurve heißt die sphärische Indikatrix der Regelfläche. Sie hängt nur von der geometrischen Gestalt der Fläche, nicht aber von der speziellen Wahl der Direktrix ab. Nur bei Zylinderflächen artet die Indikatrix zu einem Punkt aus.

Beschäftigt man sich mit einer gewissen Flächenklasse, so ist die Frage reizvoll, ob in dieser Klasse Regelflächen vorkommen.

So hat bereits im Jahre 1842 E.Catalan bewiesen, daß die Wendelfläche die einzige Regelfläche ist, die zugleich Minimalfläche ist (V.u.K. Kommerell, [XIII], S.179).
Wie ich bereits im Abschnitt 2.1 erwähnte, hat Ullrich die Gesamtheit der Torsen unter den Betragflächen bestimmt. Ferner hat er in der gleichen Arbeit auch ein Beispiel für eine windschiefe Regelfläche, die zugleich Betragfläche ist, angegeben. Wir werden im folgenden zeigen, daß es außer den von Ullrich genannten Regelflächen keine weiteren unter den Betragflächen gibt.
Bevor wir mit der eigentlichen Untersuchung beginnen, müssen einige Hilfsmittel bereitgestellt werden.
Wir legen ein kartesisches x,y,w-Koordinatensystem zu Grunde und betrachten ein Flächenstück F, das schlicht über der x,y-Ebene liegt. Das Flächenstück F habe einerseits die Parameterdarstellung

1. $F : \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u,v)$ und andererseits die explizite Darstellung

2. $F : \mathfrak{r} = (x, y, R(x,y))$.

Wir wollen die partiellen Ableitungen von R nach x und y ausdrücken als Funktionen von u und v. Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn wir $\mathfrak{r}(u,v)$ zunächst nicht in Komponenten zerlegen, sondern ansetzen:

3. $x=x(u,v)=\mathfrak{n}_1\cdot\mathfrak{r}(u,v), y=y(u,v)=\mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{r}(u,v), w=w(u,v)=\mathfrak{n}_3\cdot\mathfrak{r}(u,v)$,

wobei die $\mathfrak{n}_i$ (i=1,2,3) die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen sind. Somit ist

4. $R(x(u,v),y(u,v)) = \mathfrak{n}_3\cdot\mathfrak{r}(u,v)$ und

5. $x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = \mathfrak{n}_1\cdot\mathfrak{r}_u, x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = \mathfrak{n}_1\mathfrak{r}_v, y_u = \frac{\partial y}{\partial u} = \mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{r}_u, \; y_v = \frac{\partial y}{\partial v} = \mathfrak{n}_2\mathfrak{r}_v$.

Unter Beachtung von $\mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2=\mathfrak{n}_3$ erhalten wir weiter

6. $D = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \mathfrak{n}_3\cdot(\mathfrak{r}_u\times\mathfrak{r}_v) = (\mathfrak{n}_3\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{r}_v)$ oder

7. $D = \mathfrak{n}_3\cdot\tilde{\mathfrak{w}}$ mit $\tilde{\mathfrak{w}} = \mathfrak{r}_u\times\mathfrak{r}_v$.

Ferner gilt

8. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{D}\cdot\mathfrak{n}_2\mathfrak{r}_v, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{D}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{D}\mathfrak{n}_1\mathfrak{r}_v,$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{D}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{D}\cdot\mathfrak{n}_2\mathfrak{r}_u, \; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{D}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{D}\mathfrak{n}_1\mathfrak{r}_u$.

So erhalten wir

9. $\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{D}(\mathfrak{r}_u\times\mathfrak{r}_v)\cdot\mathfrak{n}_1 = -\frac{(\mathfrak{n}_1\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v)}{(\mathfrak{n}_3\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v)} = -\frac{\mathfrak{n}_1\cdot\tilde{\mathfrak{w}}}{\mathfrak{n}_3\cdot\tilde{\mathfrak{w}}}$,

$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{D}(\mathfrak{r}_u\times\mathfrak{r}_v)\cdot\mathfrak{n}_2 = -\frac{(\mathfrak{n}_2\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v)}{(\mathfrak{n}_3\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v)} = -\frac{\mathfrak{n}_2\cdot\tilde{\mathfrak{w}}}{\mathfrak{n}_3\cdot\tilde{\mathfrak{w}}}$ und

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{1}{D^3}\left\{(n_2\tilde{u}\tilde{u}_v)(n_2\psi_u) - (n_2\tilde{u}\tilde{u}_u)(n_2\psi_v)\right\},$$

1o. $$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{1}{D^3}\left\{(n_1\tilde{u}\tilde{u}_v)(n_1\psi_u) - (n_1\tilde{u}\tilde{u}_u)(n_1\psi_v)\right\} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \frac{1}{D^3}\left\{(n_2\tilde{u}\tilde{u}_v)(n_1\psi_v) - (n_2\tilde{u}\tilde{u}_u)(n_1\psi_u)\right\}.$$

Haben wir speziell die Darstellung

(1) $\psi(u,v) = \mathfrak{n}(u) + v\cdot\mathfrak{z}(u)$ mit

(2) $\mathfrak{n}(u) = (\xi(u),\eta(u),\zeta(u)), \mathfrak{z}(u) = (\varphi(u),\psi(u),\lambda(u))$,

so ist

(3) $x(u,v) = \xi(u) + v\varphi(u)$, $y(u,v) = \eta(u) + v\psi(u)$,
$w(u,v) = \zeta(u) + v\lambda(u) = R(x(u,v), y(u,v))$,

und wir erhalten mit 9. bzw. 1o.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{D}\left\{(\zeta'\varphi - \xi'\lambda) + v(\lambda'\varphi - \varphi'\lambda)\right\},$$

(4)
$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{D}\left\{(\eta'\lambda - \zeta'\psi) + v(\psi'\lambda - \lambda'\psi)\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{1}{D^3}\left\{-2(\mathfrak{n}'\mathfrak{z}\mathfrak{z}')\varphi(\xi' + v\varphi') - \varphi^2\cdot(\mathfrak{n}'\mathfrak{n}''\mathfrak{z}) + v\varphi^2\cdot(\mathfrak{n}'\mathfrak{z}\mathfrak{z}'') - v\varphi^2\cdot(\mathfrak{n}''\mathfrak{z}\mathfrak{z}') - v^2\varphi^2\cdot(\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\mathfrak{z}'')\right\} \quad \text{und}$$

(5)
$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{1}{D^3}\left\{-2(\mathfrak{n}'\mathfrak{z}\mathfrak{z}')\psi(\eta' + v\psi') - \psi^2\cdot(\mathfrak{n}'\mathfrak{n}''\mathfrak{z}) + v\cdot\psi^2\cdot(\mathfrak{n}'\mathfrak{z}\mathfrak{z}'') - v\psi^2\cdot(\mathfrak{n}''\mathfrak{z}\mathfrak{z}') - v^2\psi^2\cdot(\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\mathfrak{z}'')\right\}.$$

Aus 6. folgt

(6) $D = (\xi'\psi - \eta'\varphi) + v(\varphi'\psi - \psi'\varphi)$.

Es sei nun f eine im Gebiet G der z-Ebene holomorphe Funktion. Mit $R(x,y) = |f(z)|$ und $\Phi(x,y) = \arg f(z)$ lauten die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen

(7) $$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \text{und daraus folgt}$$

(8) $$R\cdot\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right\} = \left[\frac{\partial R}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial y}\right]^2.$$

Wir haben (8) bereits ausführlich in der Einleitung diskutiert und mit Erfolg bei der Untersuchung über die Rotationsflächen benutzt. Der Zusammenhang mit (7) ist insofern wichtig, als dadurch prinzipiell geklärt ist, wie man von der Betragsfunktion wieder zu f gelangt.

Um die Regelflächen zu bestimmen, die zugleich Betragflächen sind, tragen wir nach (3), (4) und (5) die Größen R, R_x, R_y, R_{xx} und R_{yy} als Funktionen von u und v in (8) ein. Dies liefert eine algebraische Gleichung dritten Grades in v, die wir nicht gesondert festhalten. Diese Gleichung ist genau dann

identisch in u und v erfüllt, wenn die Faktoren bei den Potenzen von v identisch in u verschwinden. Das führt auf die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(9)_{v^3} \quad -\lambda\cdot(\varphi^2+\psi^2)\cdot(\xi'\eta''-\xi''\eta') = (\varphi'\psi-\psi'\varphi)\left[(\lambda'\varphi-\varphi'\lambda)^2+(\psi'\lambda-\lambda'\psi)^2\right],$$

$$(10)_{v^2} \quad \begin{aligned} &-\xi\cdot(\varphi^2+\psi^2)\cdot(\xi'\eta''-\xi''\eta') + \lambda\{-2(\xi'\eta''-\xi''\eta')(\varphi\varphi'+\psi\psi')+(\varphi^2+\psi^2)[(\xi'\eta'''-\xi'''\eta')-(\xi''\eta''-\xi''\eta')]\} \\ &=(\xi'\psi-\eta'\varphi)\left[2(\xi'\varphi-\xi\varphi')(\lambda'\varphi-\varphi'\lambda)+2(\eta'\lambda-\xi'\psi)(\psi'\lambda-\lambda'\psi)\right] + \\ &\quad(\xi''\psi-\eta''\varphi)\left[(\lambda'\varphi-\varphi'\lambda)^2+(\psi'\lambda-\lambda'\psi)^2\right], \end{aligned}$$

$$(11)_{v} \quad \begin{aligned} &\lambda\{-2(\xi'\eta''-\xi''\eta')\cdot(\varphi\xi'+\psi\eta')-(\xi'\eta'''-\xi'''\eta')\cdot(\varphi^2+\psi^2)\} + \\ &\xi\{-2(\xi'\eta''-\xi''\eta')\cdot(\varphi\varphi'+\psi\psi')+(\varphi^2+\psi^2)[(\xi'\eta'''-\xi'''\eta')-(\xi''\eta''-\xi''\eta')]\} \\ &=(\xi'\psi-\eta'\varphi)\left[2(\xi'\varphi-\xi\varphi')(\lambda'\varphi-\varphi'\lambda)+2(\eta'\lambda-\xi'\psi)(\psi'\lambda-\lambda'\psi)\right] + \\ &\quad(\xi''\psi-\eta''\varphi)\left[(\xi'\varphi-\xi\varphi')^2+(\eta'\lambda-\xi'\psi)^2\right], \end{aligned}$$

$$(12)_{v^0} \quad \begin{aligned} &\xi\{-2(\xi'\eta''-\xi''\eta')(\varphi\xi'+\psi\eta')-(\xi'\eta'''-\xi'''\eta')(\varphi^2+\psi^2)\} = \\ &(\xi'\psi-\eta'\varphi)\left[(\xi'\varphi-\xi\varphi')^2+(\eta'\lambda-\xi'\psi)^2\right]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Herleitung von (9) bis (12) ist folgendes klar: Haben wir für das Flächenstück F eine weitere Darstellung

$$\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u}) + \tilde{v}\,\tilde{\xi}(\tilde{u}),$$

so gehen die Gleichungen in sich über derart, daß alle Größen $\xi, \xi', \xi'', \ldots, \eta, \eta', \eta''$ zu ersetzen sind durch $\tilde{\xi}, \tilde{\xi}', \tilde{\xi}'', \ldots, \tilde{\eta}, \tilde{\eta}', \tilde{\eta}''$, wobei der $'$ jetzt die Ableitung nach $\tilde{u}$ bedeutet. Wenn wir so einen Übergang durchführen, um möglichst einfache Gleichungen zu erhalten, werden wir in der Bezeichnungsweise meist auf die "Schlange" verzichten.

In der Differentialgleichung (9) treten nur die Komponenten von ξ, ξ' und ξ'' auf. Diese werden wir zuerst lösen und so einen Überblick über die möglichen Leitkegel und sphärischen Indikatrizen von den Regelflächen erhalten, die zugleich Betragflächen sein könnten. Dabei brauchen wir, um die geometrische Gestalt der auftretenden Leitkegel zu erfassen, die stereographische Projektion (Abb. 8).

Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung gilt für den Nordpol N N = (0,0,1), für das im Südpol gelegene Projektionszentrum S S = (0,0,-1); ferner sei P' = (x',y',w') und P =(x,y,0), dann gilt

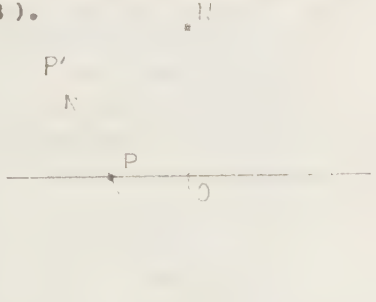


Abb. 8

$$x=\frac{x'}{1+w'}, y=\frac{y'}{1+w'}, r^2=x^2+y^2=\frac{1-w'}{1+w'},$$

$$(13)\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{y'}{x'} \text{ und}$$

$$x'=\frac{2x}{1+r^2},\quad y'=\frac{2y}{1+r^2}, w'=\frac{1-r^2}{1+r^2}.$$

3.2 Die Bestimmung der Regelflächen unter den Betragflächen

A: Die Ableitung notwendiger Bedingungen für die Leitkegel und sphärischen Indikatrizen

Um die Differentialgleichung (9) zu lösen, gehen wir von einer Darstellung

(1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u)+v\,\mathfrak{z}(u)$ des Flächenstückes aus, bei der $\mathfrak{z}(u)$ ein Einheitsvektor ist. Dazu parametrisieren wir die Einheitskugel mit Hilfe der geografischen Länge und der Poldistanz (Abb. 9). Damit ergibt sich für die Einheitskugel die Darstellung

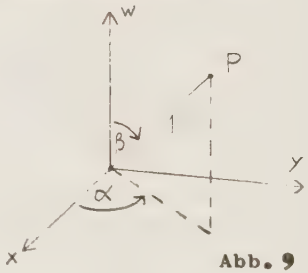


Abb. 9

1. $\mathfrak{z}(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\beta)$
mit $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 \le \beta \le \pi$.

Mit geeigneten Funktionen $\alpha = \alpha(u)$, $\beta = \beta(u)$ erhalten wir so

2. $\mathfrak{z}(u) = \mathfrak{z}(\alpha(u), \beta(u))$ und für die Komponenten von $\mathfrak{z}$

3. $\varphi(u)=\cos\alpha(u)\sin\beta(u)$, $\psi(u)=\sin\alpha(u)\sin\beta(u)$, $\lambda(u)=\cos\beta(u)$.

Wir berechnen die in der Differentialgleichung (9) auftretenden Terme. Zunächst erhalten wir

4. $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}_\alpha \cdot \alpha' + \mathfrak{z}_\beta \cdot \beta'$ und

5. $\mathfrak{z}'' = \mathfrak{z}_{\alpha\alpha}\cdot\alpha'^2 + 2\,\mathfrak{z}_{\alpha\beta}\alpha'\beta' + \mathfrak{z}_{\beta\beta}\cdot\beta'^2 + \mathfrak{z}_\alpha\cdot\alpha'' + \mathfrak{z}_\beta\cdot\beta''$.

Das ergibt

6. $\mathfrak{z}\cdot(\mathfrak{z}'\times\mathfrak{z}'') = \sin^2\beta\cos\beta\cdot\alpha'^3 + 2\cos\beta\cdot\alpha'\beta'^2 + \sin\beta(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'')$.

Aus 3. erhalten wir

7. $\varphi^2+\psi^2 = \sin^2\beta$, $\varphi'\psi - \psi'\varphi = -\alpha'\cdot\sin^2\beta$ und

8. $(\lambda'\varphi - \varphi'\lambda)^2 + (\psi'\lambda - \lambda'\psi)^2 = \alpha'^2\cdot\sin^2\beta\cos^2\beta + \beta'^2$.

Dies alles eingesetzt in (9) führt auf

9. $2\cos^2\beta\cdot\alpha'\beta'^2 + \sin\beta\cos\beta(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') = \alpha'\beta'^2$.

Dabei haben wir durch $-\sin^2\beta$ dividiert. Dies konnten wir unbedenklich tun; denn nach Voraussetzung betrachten wir ein Flächenstück, das schlicht über der x,y-Ebene liegt, so daß auf ihm keine Erzeugenden vorkommen, die senkrecht auf der x,y-Ebene stehen.

Zunächst erhalten wir als Lösungen

1o. $\alpha \equiv$ const oder $\beta \equiv$ const.

Für $\alpha \not\equiv$ const und $\beta \not\equiv$ const formen wir die Differentialgleichung um. Wir multiplizieren 9. mit $\frac{2}{\beta'^2}$ und erhalten

11. $\frac{\alpha'}{\beta'}\cos 2\beta\cdot 2\beta' + \sin 2\beta\,\frac{\alpha''\beta' - \alpha'\beta''}{\beta'^2} = 0$.

Die letzte Differentialgleichung ist gleichbedeutend mit

12. $\left[\frac{\alpha'}{\beta'}\sin 2\beta\right]' = 0$, und daraus folgt

13. $\frac{\alpha'}{\beta'}\sin 2\beta = k$.

Wir können $k \neq 0$ annehmen und erhalten unter Berücksichtigung von $\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{d\alpha}{d\beta}$ aus 13.

14. $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{k}{\sin 2\beta}$.

Es ist $\int \frac{1}{\sin 2\beta}\, d\beta = \frac{1}{2}\log|\tan\beta| + \tilde{c}$, so daß wir aus 14.

15. $\alpha = \frac{k}{2}\log|\tan\beta| + \tilde{\tilde{c}}$ gewinnen.

Setzen wir $\frac{2}{k} = \gamma$, so ist

(14) $\tan\beta = c^* \cdot e^{\gamma\alpha}$.

Damit können wir bereits den ersten Satz dieser Untersuchung aussprechen.

Satz 3: Ist eine Betragfläche zugleich eine Regelfläche, so tritt für ihre sphärische Indikatrix notwendig einer der folgenden Fälle ein:

(a) Die Indikatrix entartet in einen Punkt ($\alpha \equiv$const und $\beta \equiv$const).

(b) Die Indikatrix ist Teil eines Breitenkreises ($\beta \equiv$ const).

(c) Die Indikatrix ist Teil eines Längenkreises ($\alpha \equiv$ const).

(d) Längs der Indikatrix gilt zwischen der geografischen Länge α und der Poldistanz β die Beziehung $\tan\beta = c^* \cdot e^{\gamma\alpha}$.

Im Fall (a) sind die Erzeugenden parallel, die Fläche ist eine Zylinderfläche. Im Fall(b) haben die Erzeugenden eine konstante Neigung gegen die x,y-Ebene, während der Winkel, den ihre Projektionen in die x,y-Ebene mit der x-Achse einschließen, variiert. Im Fall (c) schließen die Projektionen der Erzeugenden mit der x-Achse einen festen Winkel ein, dagegen variiert die Neigung der Erzeugenden gegen die x,y - Ebene. Der Fall (d) läßt sich nicht so ohne weiteres überblicken. Wir wollen uns in diesem Fall zunächst einen genaueren Einblick in die Geometrie des Leitkegels verschaffen. Für die sphärische Indikatrix hatten wir die Parameterdarstellung

1. $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\beta) = (\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)$ mit $\alpha = \alpha(\beta)$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{k}{\sin 2\beta}$ erhalten.

Der Leitkegel mit der Spitze im Ursprung ist mithin gegeben durch

2. $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z}^*(v,\beta) = v \cdot \mathfrak{z}(\beta)$.

Wir verschieben seine Spitze in den Südpol der Einheitskugel (Abb.1o). Er hat dann die Darstellung

3. $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{a} + v \cdot \mathfrak{z}(\beta)$ mit

$\mathfrak{a} = (0,0,-1)$.

Bringen wir ihn mit der Einheitskugel zum Schnitt, so hat die Schnittkurve die Parameterdarstellung

4. $\tilde{\mathfrak{z}}_o = \mathfrak{a} + v_o \cdot \mathfrak{z}(\beta)$ mit

$v_o = 2\cos\beta$.

Rechnen wir dies aus, so erhalten wir

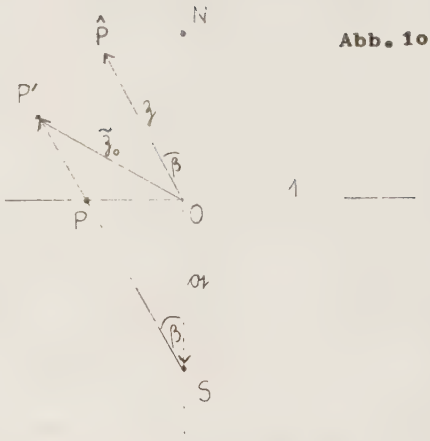


Abb. 1o

5. $\tilde{\mathfrak{z}}_o = (\cos\alpha\sin2\beta,\ \sin\alpha\sin2\beta,\ \cos2\beta)$ mit $\tan\beta = c^* e^{\gamma\alpha}$.

Man kann auch leicht elementar - geometrisch zeigen, daß $\sphericalangle \hat{P}\ O\ P' = \beta$ gilt und hat dann sofort das obige Resultat.

Wir betrachten das Urbild der Schnittkurve 5. unter der stereographischen Projektion (13). Es ist

6. $x' = \cos\alpha\sin2\beta$, $y' = \sin\alpha\sin2\beta$, $w' = \cos2\beta$.

Aus 6. folgt

7. $r^2 = \frac{1-\cos2\beta}{1+\cos2\beta} = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \tan^2\beta$,

und aus 7. erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung (14)

8. $r = |c^*| e^{\gamma\alpha}$.

Ferner folgt aus 6.

9. $\varphi = \alpha$.

Das in der x,y-Ebene gelegene Urbild hat nach 8. und 9. in Polarkoordinaten (r,φ) die Darstellung

(15) $r = |c^*| e^{\gamma\varphi}$, d.h. das Urbild ist ein Teilstück der logarithmischen Spirale. Dieses kann als Leitkurve des Leitkegels genommen werden. Die logarithmische Spirale ist bekanntlich diejenige Kurve, die alle Ursprungsstrahlen der x,y-Ebene unter dem festen Winkel δ (mit $\gamma = \cot\delta$) schneidet. Außerdem ist die stereographische Projektion winkeltreu, und sie bildet die Ursprungsstrahlen in die Längenkreise der Einheitskugel ab. Mithin schneidet die auf der Kugel gelegene Kurve 5. $\tilde{\mathfrak{z}}_o = \tilde{\mathfrak{z}}_o(\beta)$ die Meridiane gleichfalls unter dem festen Winkel δ, d.h. sie ist Teilstück einer Loxodromen (Kurve festen Kompaßkurses) der Einheitskugel.

Die Lösung der Differentialgleichung (9) hat uns den gewünschten Überblick über die Leitkegel gebracht, die höchstens in Frage kommen. Man muß nun versuchen, für die in Satz 3 aufgeführten Fälle (a) bis (d) aus den Differentialgleichungen (1o) bis (12) jeweils eine Direktrix zu bestimmen. In der Tat lassen sich alle vier Fälle in dieser Weise erfolgreich behandeln, und die Rechnung lehrt, daß es zu der Konstellation (c) keine Betragfläche gibt. Um die Beweisführung abzukürzen, werden wir die Fälle (a) und (c) auf anderem Wege erledigen. Zunächst beschäftigen wir uns mit (b) und (d). Hier ist die Beweislast am größten.

B: Die Untersuchung der Fälle (b) und (d) aus Satz 3

In diesen Fällen können wir die geografische Länge α als Flächenparameter wählen, und die Darstellung (1) lautet jetzt

1. $\varphi = \mathfrak{y}(\alpha) + v\mathfrak{z}(\alpha)$ mit $\mathfrak{z}(\alpha) = (\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)$;

dabei ist im Fall (b) $\beta \equiv \beta_0$, und im Fall (d) ist $\tan\beta = c^* e^{\gamma\alpha}$. Die Rechnungen vereinfachen sich erheblich, wenn man durch

2. $\tilde{v} = v\sin\beta$ einen neuen Parameter einführt. Damit erhalten wir aus 1.

3. $\varphi = \mathfrak{y}(\alpha) + \tilde{v}(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ \cot\beta_0)$ bzw.

4. $\varphi = \mathfrak{y}(\alpha) + \tilde{v}(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ ce^{-\gamma\alpha})$ mit $c = -\frac{1}{c^*}$.

Ein Vergleich von 3. und 4. zeigt, daß die beiden Fälle nicht gesondert behandelt zu werden brauchen; denn wir erhalten für $\gamma = 0$ und $c = \cot\beta_0$ aus 4. die Darstellung 3. Die Beweisführung wird weiter vereinfacht, wenn man die eingangs erwähnte Freiheit in der Wahl der Direktrix bedenkt und diese als Schnittkurve der Regelfläche F mit der Ebene $x = \xi_0$ wählt. Das ist immer dann möglich, wenn der genannte Schnitt nicht mit einer Erzeugenden von F zusammenfällt. Dies kann stets durch eine solche Transformation des räumlichen x,y,w - Koordinatensystems erreicht werden, wie sie in 2.1 beschrieben wurde. So eine Transformation ist innerhalb unserer Beweisführung zulässig; denn wir haben ja gerade in 2.1 gezeigt, daß die explizite Darstellung des Flächenstückes auch in bezug auf das neue System durch eine Betragsfunktion gegeben ist. Somit können wir ausgehen von einer Darstellung

(16) $\varphi = \mathfrak{y}(\alpha) + v\mathfrak{z}(\alpha)$ mit $\mathfrak{y}(\alpha) = (\xi_0, \eta(\alpha), \zeta(\alpha))$ und
$\mathfrak{z}(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \lambda(\alpha)) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ ce^{-\gamma\alpha})$.

Die Darstellung (16) erfaßt ein solches Flächenstück, auf dem keine Erzeugendenparallel zur Ebene $x = \xi_0$ ist. Wir haben in den Rechnungen also stets $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3}{2}\pi$ vorauszusetzen. Wir berechnen zunächst die Spatprodukte, die in den Gleichungen (1o), (11) und (12) auftreten.

Aus (16) folgt

$$(\mathfrak{x}' \mathfrak{y} \mathfrak{z}') = ce^{-\gamma\alpha}\cdot\left[\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\right]\eta' + \zeta',$$
$$(\mathfrak{x}'' \mathfrak{y} \mathfrak{z}) = ce^{-\gamma\alpha}\cdot\left[\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\right]\eta'' + \zeta'',$$

1. $$(\mathfrak{x}' \mathfrak{y} \mathfrak{z}'') = -ce^{-\gamma\alpha}\cdot\left[1 + \gamma^2\right]\cdot\eta'\cdot\cos\alpha\ ,$$
$$(\mathfrak{z} \mathfrak{y}' \mathfrak{z}'') = ce^{-\gamma\alpha}\cdot\left[1 + \gamma^2\right] \text{ und}$$
$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{z}) = \cos\alpha\,(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')\ .$$

Für c=0 in der Darstellung (16) reduziert sich (1o) auf 0 =0, für c≠0 erhalten wir aus (1o) nach leichter Umformung

2. $$-\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta - \gamma\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta - 2\gamma\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta' - \frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta'' =$$
$$\eta''\cdot(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha) - 2\eta'\cdot(\cos\alpha + \gamma\sin\alpha)\ .$$

Es ist $\left[\zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\right]'' = \frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta'' + 2\gamma\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta' + \gamma^2\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot\zeta$

und $\left[\eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha)\right]'' = \eta''(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha) - 2\eta'(\cos\alpha + \gamma\sin\alpha) - \eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha)$

Also ist 2. gleichbedeutend mit

3. $$\left[\eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha)\right]'' + \eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha) + \left[\zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\right]'' + \zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha} = 0.$$

Führen wir die neue Funktion $\delta = \delta(\alpha)$ durch $\delta = \eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha) + \zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}$ ein, so erhalten wir aus 3.

$$\delta'' + \delta = 0 \quad \text{und daraus}$$
$$\delta = A\sin\alpha + B\cos\alpha, \quad \text{also}$$

4. $$\zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha} = A\sin\alpha + B\cos\alpha - \eta(\gamma\cos\alpha - \sin\alpha)\ .$$

Wir erstellen als nächstes die Differentialgleichungen (11) und (12) für die Darstellung (16) und werden dann die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe von 4. entkoppeln.

Für c = 0 erhalten wir aus (11)

5. $$\zeta\zeta'' = \zeta'^2.$$

Aus (11) folgt für c ≠ 0 nach Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{c^2}e^{2\gamma\alpha}$

$$2\eta'^2 - 2(\gamma\cos\alpha + \sin\alpha)\eta'\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha} - \cos\alpha\left(\eta'\zeta''\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha} - \eta''\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\right)$$

6. $$+\zeta\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}\cdot(-\cos\alpha\,(1+\gamma^2)\eta' - (\gamma\cos\alpha - \sin\alpha)\eta'' - \zeta''\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha}) =$$
$$-\eta'^2 + 2\sin\alpha\,\eta'\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{\gamma\alpha} - \zeta'^2\cdot\frac{1}{c^2}e^{2\gamma\alpha}\ .$$

Aus (12) erhalten wir für c=0

7. $-2\sin\alpha\,\eta'\xi\zeta' - \cos\alpha\,\eta'\xi\zeta'' + \cos\alpha\,\eta''\xi\zeta' = -\cos\alpha\,\eta'\zeta'^2$.

Für c≠0 ergibt sich aus (12) nach leichter Umformung

8. $\xi\cdot\frac{1}{c}e^{c\alpha}\cdot\left\{2\sin\alpha\,\eta'([\gamma\cos\alpha-\sin\alpha]\eta' + \zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{c\alpha}) + \cos\alpha(\eta'\zeta''\frac{1}{c}e^{c\alpha} - \eta''\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{c\alpha})\right\} =$

$$\eta'\cos\alpha\left\{\eta'^2 - 2\sin\alpha\,\eta'\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{c\alpha} + \zeta'^2\cdot\frac{1}{c^2}e^{2c\alpha}\right\}.$$

Wir befassen uns zuerst mit den Differentialgleichungen 5. und 7.. Es sei daran erinnert, daß sie zum Fall (b) aus Satz 3 gehören, und zwar für $\beta\equiv\beta_0=\frac{\pi}{2}$. Die sphärische Indikatrix ist Teil des Äquators, was gleichbedeutend damit ist, daß die Erzeugenden parallel zur x,y-Ebene sind.

Da die triviale Lösung $\zeta\equiv$ const von 5. in diesem Zusammenhang nicht interessiert (sie führt auf die horizontale Ebene, und diese wird unter geometrischen Gesichtspunkten besser beim Fall (a) miterfaßt), gelangen wir von 5. zu

9. $-\frac{\zeta''}{\zeta'} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. 9. läßt sich leicht integrieren und liefert

10. $\zeta = b\cdot e^{a\alpha}$.

Setzen wir 5. in 7. ein, so erhalten wir $\zeta\zeta'\cdot\{-2\sin\alpha\,\eta' + \cos\alpha\,\eta''\} = 0$, also

11. $\cos\alpha\,\eta'' = 2\sin\alpha\,\eta'$ oder $\frac{\eta''}{\eta'} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; denn auch hier interessiert die triviale Lösung $\eta\equiv$ const nicht, da sie zu keiner sinnvollen geometrischen Konstellation führt (wir hatten $\xi\equiv\xi_0$ gewählt).

Die Integration von 11. führt auf

12. $\eta = d\cdot\tan\alpha + y_0$.

Wir werden nach 10. und 12. im Fall (b) für $\beta\equiv\beta_0=\frac{\pi}{2}$ auf die Regelfläche F mit der Darstellung

(17) $x=\xi_0+v\cos\alpha$, $y=y_0 + d\cdot\tan\alpha + v\sin\alpha$, $w=b\cdot e^{a\alpha}$ geführt.

Wir bestimmen die explizite Darstellung w = R(x,y).

Aus (17) folgt

$\frac{x-\xi_0}{\cos\alpha} = v$ und $y - y_0 = \tan\alpha\cdot\left[x-(\xi_0-d)\right]$.

Wir setzen $x_0=\xi_0-d$ und erhalten $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \tan\alpha$, also

(18) $w = R(x,y) = b\cdot e^{a\cdot\arctan\frac{y-y_0}{x-x_0}}$.

Man müßte, streng genommen, mit diesem R(x,y) in das System (7) eingehen, aber man übersieht leicht, daß R(x,y) die Betragsfunktion zu

(19) $f(z)=z_1(z-z_0)^{-ia}$ mit $|z_1| = b$ und $z_0 = x_0 + iy_0$ ist.

Daß wir bei der Herleitung von (18) auch b< 0 bekamen, liegt daran, daß unter den Integralflächen von (8) auch die Spie-

gelbilder der Betragflächen bzgl. der x,y-Ebene enthalten sind, wie wir bereits anmerkten.
Auf die geometrische Gestalt der Betragfläche zu $f(z)=z_1\cdot(z-z_0)^{-i\alpha}$ gehen wir am Schluß dieser Untersuchung näher ein.
Wir wenden uns jetzt dem Studium der Differentialgleichungen 6. und 8. zu.
Wir führen eine neue Funktion $\tau=\tau(\alpha)$ durch

13. $\tau=\zeta\cdot\frac{1}{c}\,e^{\delta\alpha}$ ein, dann ist

14. $\zeta'\cdot\frac{1}{c}e^{\delta\alpha}=\tau'-\gamma\cdot\tau$ und $\zeta''\cdot\frac{1}{c}\,e^{\delta\alpha}=\tau''-2\gamma\cdot\tau'$.

13. und 14. eingesetzt in 6. ergibt

15. $3\eta'^2+\tau'^2-4\sin\alpha\,\eta'\tau'+4\gamma\sin\alpha\tau\eta'-\cos\alpha(\eta'\tau''-\eta''\tau')$
$-2\gamma\cos\alpha\tau\eta''-\cos\alpha\tau\eta'+\sin\alpha\tau\eta''-\tau\cdot\tau''=0$.

13. und 14. eingesetzt in 8. führt zu

16. $\tau\cdot\{-2\sin^2\alpha\,\eta'^2+2\sin\alpha\tau'\eta'-2\gamma\sin\alpha\tau\eta'+\cos\alpha(\eta'\tau''-\eta''\tau')+\gamma\cos\alpha\tau\eta''\}=$
$\eta'^3\cdot\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\,\eta'^2\cdot\tau'+\cos\alpha\,\eta'\cdot\tau'^2$.

4. und 13. liefern schließlich den Zusammenhang

17. $\tau=A\sin\alpha+B\cos\alpha-\eta(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)$.

In den Differentialgleichungen 15. und 16. tritt jeweils nur die erste Ableitung und die zweite Ableitung von η, nicht aber die Funktion η selbst auf. Setzt man $\eta=\tilde{\eta}+\text{const}$, so gehen 15. und 16. in sich über. Dies benutzen wir, um den Zusammenhang 17. zu vereinfachen. Wir setzen $\eta=\tilde{\eta}-A$ und erhalten

$$\tau=(B+\gamma A)\cos\alpha-\tilde{\eta}(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)\quad .$$

Wir schreiben dann für $\tilde{\eta}$ wieder η und berücksichtigen die additive Konstante am Schluß. Ferner setzen wir $b=B+\gamma A$, so daß wir

18. $\tau=b\cos\alpha-\eta\cdot(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)$ erhalten. Dann ist

$\tau'=-b\sin\alpha-\eta'\cdot(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)+\eta\cdot(\gamma\sin\alpha+\cos\alpha)$

19. und

$\tau''=-b\cos\alpha-\eta''\cdot(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)+2\eta'\cdot(\gamma\sin\alpha+\cos\alpha)+\eta\cdot(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)$.

18. und 19. eingesetzt in 15. führt zu

20. $-b\cos\alpha(\gamma\cos\alpha+\sin\alpha)\eta''+2b(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\eta'+4b\gamma\sin\alpha\cos\alpha\eta'-2b\gamma\eta+$
$(1+\gamma^2)\eta^2+(1+\gamma^2)\cos^2\alpha\,\eta'^2-4(1+\gamma^2)\sin\alpha\cos\alpha\eta\eta'+(1+\gamma^2)\cos^2\alpha\,\eta\eta''+b^2=0$.

18. und 19. eingesetzt in 16. liefert uns

21. $b^2\cos^2\alpha\cdot(\gamma\cos\alpha+\sin\alpha)\eta''-2b^2\sin\alpha\cos\alpha(\gamma\cos\alpha+\sin\alpha)\eta'-b^2\cos\alpha\,\eta'-$
$2b(1+\gamma^2)\cos^3\alpha\eta\eta''+b\cos\alpha\,\eta\eta''+2b\cos^2\alpha\cdot(\cos\alpha-\gamma\sin\alpha)\eta'^2+$
$4b(1+\gamma^2)\sin\alpha\cos^2\alpha\eta\eta'+2b(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)\eta\eta'+\gamma(1+\gamma^2)\cos^3\alpha\,\eta''-$
$(1+\gamma^2)\sin\alpha\cos^2\alpha\eta^2\eta''+2\cdot(1+\gamma^2)\sin\alpha\cos^2\alpha\eta\eta'^2-(1+\gamma^2)\cos^3\alpha\,\eta'^3+$
$(1+\gamma^2)\sin^2\alpha\cos\alpha\eta^2\eta'-(1+\gamma^2)\cos^3\alpha\eta^2\eta'-2\gamma(1+\gamma^2)\sin\alpha\cos^2\alpha\eta^2\eta'=0$.

Unsere Aufgabe besteht darin, die Funktionen $\eta=\eta(\alpha)$ zu er-

mitteln, die sowohl der Differentialgleichung 2o. als auch der Differentialgleichung 21. genügen.

Wir werden zuerst die Differentialgleichung 2o. lösen.

Dazu transformieren wir zunächst die unabhängige Veränderliche, indem wir setzen

22. $\eta(\alpha) = u(v(\alpha))$ mit $v(\alpha) = \tan\alpha$.

Aus 22. folgt

23. $\eta' = \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{du}{dv}$ und $\eta'' = \frac{1}{\cos^4\alpha}\frac{d^2u}{dv^2} + 2\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{du}{dv}$.

22. und 23. eingesetzt in 2o. ergibt

24. $-b\gamma(1+v^2)u''-bv(1+v^2)u''-2bu' -2b\gamma u+ (1+\gamma^2)u^2+$
$(1+\gamma^2)(1+v^2)u'^2 -2\cdot(1+\gamma^2)v\cdot uu'+2b\gamma vu'+(1+\gamma^2)(1+v^2)uu''+b^2=0.$

Für b=0 vereinfacht sich 24. zu

25. $u^2 + (1+v^2)\,u'^2 - 2vuu' + (1+v^2)\,uu'' = 0$.

Für b≠0 setzen wir

26. $g(v)=\frac{1}{b}\cdot u(v)$, und 24. geht damit über in

27. $-\gamma(1+v^2)g'' -v(1+v^2)g'' -2g'=2\gamma g +(1+\gamma^2)g^2+(1+\gamma^2)(1+v^2)g'^2-$
$2(1+\gamma^2)vgg' +2\gamma vg'+ (1+\gamma^2)(1+v^2)gg'' + 1 = 0$.

In 27. transformieren wir wiederum die abhängige Veränderliche, indem wir setzen

28. $g(v) = h(v) + \frac{1}{1+\gamma^2}v + \frac{\gamma}{1+\gamma^2}$. Es ist dann

29. $g' = h' + \frac{1}{1+\gamma^2}$, $g'' = h''$, und die Differentialgleichung für h lautet

3o. $(1+v^2)hh'' + (1+v^2)h'^2 -2vhh' +h^2= 0$.

Ein Vergleich mit 25. zeigt, daß wir für die beiden Fälle b=0 und b≠0 die gleiche Differentialgleichung zu lösen haben.

Wir schreiben sie uns nochmal in der Form

31. $(1+v^2)\left[zz'' +z'^2\right]- 2vzz' + z^2 = 0$ auf.

Wir setzen

32. $\omega(v) = z^2(v)$ und erhalten $zz'=\frac{1}{2}\omega'$, $z'^2+zz''=\frac{1}{2}\omega''$ und damit

33. $(1+v^2)\omega''- 2v\omega'+ 2\omega= 0$.

Wir führen eine letzte Transformation durch, indem wir wählen

34. $\omega(v) = v\cdot f(v)$. Dann ist $\omega'=f+vf'$ und $\omega''= 2f'+vf''$, und 33. geht über in

35. $v(1+v^2)f'' + 2f' = 0$.

Die Differentialgleichung 35. läßt sich leicht lösen (erste Integration etwa durch "Trennung der Veränderlichen"), und wir erhalten

36. $f = -c_1\cdot\frac{1}{v} + c_1 v + c_2$.

Aus 34. folgt

$$\omega = c_1 v^2 + c_2 v - c_1 \ .$$

Unter Berücksichtigung von 32. erhalten wir als die Lösungen von 31.

37. $z = \pm \sqrt{c_1 v^2 + c_2 v - c_1}^{-1}$.

Unter Berücksichtigung von 25. und 22. können wir festhalten: Für b=0 hat die Differentialgleichung 2o. die Lösungen

38. $\eta = \pm \sqrt{c_1 \cdot \tan^2\alpha + c_2 \cdot \tan\alpha - c_1}^{-1}$.

Aus 28., 27., 26. und 22. folgt:

Für b≠0 hat die Differentialgleichung 2o. die Lösungen

39. $\eta = \pm b \sqrt{c_1 \cdot \tan^2\alpha + c_2 \cdot \tan\alpha - c_1}^{-1} + \frac{b}{1+\gamma^2} \tan\alpha + \frac{b\gamma}{1+\gamma^2}$.

Im Prinzip brauchte man nur noch 38. für b=0 bzw. 39. für b≠0 in die Differentialgleichung 21. einzusetzen und zu prüfen, ob sich die freien Parameter so wählen lassen, daß eine Lösung von 21. entsteht. Sieht man sich jedoch die Differentialgleichung 21. und die Lösungen von 2o. näher an, so stellt man fest, daß dieser Weg schon rein rechnerisch kaum gangbar ist. Wir gehen deshalb anders vor. Zunächst wenden wir 22. $\eta(\alpha) = u(v(\alpha))$ mit $v(\alpha)=\tan\alpha$ auf 21. an. Dann erhält man die Differentialgleichung

$$b^2\gamma u''+b^2vu''-b^2u'-2b(1+\gamma^2)uu''+b(1+v^2)uu''+2bu'^2-$$

4o. $$2b\gamma vu'^2+2b\gamma uu' +\gamma(1+\gamma^2)u^2u'' -(1+\gamma^2)vu^2u'' -(1+\gamma^2)u^2u' +$$
$$2(1+\gamma^2)vuu'^2-(1+\gamma^2)(1+v^2)u'^3 = 0 \ .$$

Für b=0 vereinfacht sich 4o. zu

41. $\gamma u^2u'' - vu^2u'' - u^2u' + 2vuu'^2 - (1+v^2)u'^3 = 0$.

Addieren wir auf der linken Seite von 41. die Null in der Form $(1+v^2)\,uu'u'' - (1+v^2)\,uu'u''$, so erhalten wir

42. $uu''\{(1+v^2)u' + \gamma u - vu\} - u'\{(1+v^2)(uu''+u'^2) - 2vuu' + u^2\} = 0$.

Betrachten wir 42. zusammen mit 25., so sehen wir, daß folgendes gilt:

Eine Funktion $\eta = \eta(\alpha)$ ist im Fall b=0 genau dann Lösung von 2o. und 21., wenn die Funktion u=u(v) Lösung von

43. $uu''\cdot\{(1+v^2)u' + \gamma u - vu\} = 0$ und 25. ist. Der Zusammenhang zwischen η und u ist dabei durch 22. gegeben.

Für b≠0 wenden wir 26. auf 4o. an und erhalten

$$g''+vg'-g'-2(1+\gamma^2)gg''+(1+v^2)gg''+2g'^2-2\gamma vg'^2+2\gamma gg' +$$

44. $$\gamma(1+\gamma^2)g^2g''-(1+\gamma^2)vg^2g''-(1+\gamma^2)g^2g'+2(1+\gamma^2)vgg'^2-$$
$$(1+\gamma^2)(1+v^2)g'^3 = 0 \ .$$

Auf 44. wenden wir weiter die Transformation 28. an und gelangen so zu

45. $\gamma(1+\gamma^2)\dot{h}h''-(1+\gamma^2)vh\dot{h}h''-(1+v^2)hh''-(1+\gamma^2)h^2h'-(1+\gamma^2)(1+v^2)h'^3+$
$2\cdot(1+\gamma^2)vhh'^2-(1+v^2)h'^2+2vhh'-h^2=0$.

Addieren wir auf der linken Seite von 45. die Null in der Form $(1+\gamma^2)(1+v^2)hh'h''-(1+\gamma^2)(1+v^2)hh'h''$, so erhalten wir

46. $(1+\gamma^2)hh''\cdot\{(1+v^2)h'+\gamma h-vh\}-$
$(1+(1+\gamma^2)h')\cdot\{(1+v^2)(hh''+h'^2)-2vhh'+h^2\}=0$.

Betrachten wir 46. zusammen mit 3o., so sehen wir, daß folgendes gilt:

Eine Funktion $\eta=\eta(\alpha)$ ist im Fall $b\neq 0$ genau dann Lösung von 2o. und 21., wenn die Funktion $h=h(v)$ Lösung von

47. $hh''\cdot\{(1+v^2)h'+\gamma h-vh\}=0$ und 3o. ist. Der Zusammenhang zwischen η und h ist dabei durch 22., 26. und 28. gegeben.

Wir haben also für die beiden Fälle $b=0$ und $b\neq 0$ die gemeinsamen Lösungen $z=z(v)$ der Differentialgleichung

48. $z\cdot z''\cdot\{(1+v^2)z'+\gamma z-vz\}=0$ und der Differentialgleichung 31. zu bestimmen.

Die zerfallende Differentialgleichung 48. ist leicht zu integrieren. Ihre Lösungen sind

49. $z=c_3v+c_4$ und $z=c_5\sqrt{1+v^2}\cdot e^{-\gamma\arctan v}$.

Der Vergleich von 49. und 37. zeigt, daß einzig die Funktion $z=z(v)\equiv 0$ sowohl Lösung von 31. als auch Lösung von 48. ist. Dies führt im Fall $b=0$ nach 38. zu

5o. $\eta\equiv 0$

und im Fall $b\neq 0$ nach 39. zu

51. $\eta=\frac{b}{1+\gamma^2}\tan\alpha+\frac{b\gamma}{1+\gamma^2}$.

5o. führt zu keiner sinnvollen geometrischen Konstellation (siehe die Bemerkung nach 11.).

Aus 51. folgt mit 18. $\tau=b\cos\alpha-\eta(\gamma\cos\alpha-\sin\alpha)$

52. $\tau=\frac{b}{1+\gamma^2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$.

Bedenken wir ferner, daß es sich bei 51. tatsächlich um die nach 17. eingeführte Funktion $\tilde{\tau}$ handelt und berücksichtigen wir deshalb, wie wir es vorgemerkt hatten, die additive Konstante, so erhalten wir schließlich, wenn wir noch $\frac{b}{1+\gamma^2}=d$ setzen,

53. $\eta=d\cdot\tan\alpha+y_3$, $\tau=d\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$ mit $d\neq 0$.

Nach 13. ist $\tau = \xi \cdot \frac{1}{c} e^{\gamma\alpha}$.

Für $\gamma \neq 0$ erhalten wir

54. $\xi = c \cdot d \cdot \frac{1}{\cos\alpha} e^{-\gamma\alpha}$.

Für $\gamma = 0$ erhalten wir

55. $\xi = c \cdot d \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$ mit $c = \cot\beta_0 \neq 0$.

Für $\gamma \neq 0$ kommen wir mit (16), 53. und 54. zu der Regelfläche F

(2o) $x = \xi_0 + v\cos\alpha, y = y_0 + d\tan\alpha + v\sin\alpha, w = cd \cdot \frac{1}{\cos\alpha} e^{-\gamma\alpha} + vce^{-\gamma\alpha}$.

Für $\gamma = 0$ gelangen wir mit (16), 53. und 55. zu der Regelfläche F

(21) $x = \xi_0 + v \cdot \cos\alpha, y = y_0 + d \cdot \tan\alpha + v \cdot \sin\alpha, w = cd \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + v \cdot c$.

Wir bestimmen für die Regelflächen (2o) und (21) die explizite Darstellung $w = R(x,y)$.

Es ist $v = \frac{x - \xi_0}{\cos\alpha}$, und mit $x_0 = \xi_0 - d$ folgt daraus $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan\alpha$.

Also $\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, so daß wir zu

(22) $w = c \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \cdot e^{-\gamma \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0}}$ bzw.

(23) $w = c \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ gelangen.

Um Betragsfunktionen zu gewinnen, müssen wir in (22) und (23) jeweils $c > 0$ wählen. Man prüft leicht nach, daß (22) die Betragsfunktion zu

(24) $f(z) = z_1 \cdot (z - z_0)^{1+i\gamma}$ mit $z_0 = x_0 + iy_0$ und $|z_1| = c$ ist und (23) die Betragsfunktion zu

(25) $f(z) = z_1 \cdot (z - z_0)$ ist.

Die Funktionen (24) und (25) haben wir bereits in 2.1 bei unserer Betrachtung über die Kegel unter den Betragflächen erhalten. In diesen Fällen ist die Regelfläche identisch mit ihrem Leitkegel.

Berücksichtigen wir unser Ergebnis (19), so können wir zwischendurch folgende Zusammenfassung geben:

Die Betragflächen zum Fall (b) $\xi = \tau$ sind die Betragflächen zu

$f(z) = z_1 \cdot (z - z_0)^{i\vartheta}$ mit $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ und

$f(z) = z_1 \cdot (z - z_0)$ für $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Die Betragflächen zum Fall (d) $\tan\beta = c^* e^{\gamma\tau}$ sind die Betragflächen zu

$f(z) = z_1 \cdot (z - z_0)^{1-i\gamma}$ mit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C: Die Untersuchung der Fälle (a) und (c) aus Satz 3

In diesen Fällen schließen die Projektionen der Erzeugenden in die x,y-Ebene mit der x-Achse den festen Winkel α_0 ein. Eine Kurve auf einer Fläche F heißt Asymptotenlinie von F, wenn deren Tangente in jedem Punkt in eine Richtung zeigt, in der die Normalkrümmung verschwindet (Asymptotenrichtung). Jede auf F gelegene Gerade ist eine Asymptotenlinie von F. Auf einer Regelfläche bildet die einparametrige Schar der Erzeugenden somit die eine Schar der Asymptotenlinien. Ist die Fläche F in der expliziten Form w = w(x,y) gegeben, so lautet die Differentialgleichung für die Asymptotenlinien

$$w_{xx}\,dx^2 + 2w_{xy}\,dxdy + w_{yy}\,dy^2 = 0 .$$

Bei der Betragfläche $w = |f(z)|$ erhalten wir

1. $\mathrm{Im}^2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\,dz^2\right) = 0$ mit $dz = dx + idy$ bzw.

2. $\mathrm{Im}^2\left(\frac{f'}{f}e^{i\alpha}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{f''}{f}e^{2i\alpha}\right) = 0$ mit $dz = |dz|\,e^{i\alpha}$.

In den Fällen (a) und (c) muß also

3. $\mathrm{Im}^2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}e^{i\alpha_0}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}e^{2i\alpha_0}\right) = 0$ identisch in z gelten.

Aus 3. folgt aber unmittelbar, daß

4. $u = u(x,y) = \mathrm{Im}^2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}e^{i\alpha_0}\right)$ eine harmonische Funktion

ist. Es gilt mithin $\Delta u = 0$. Andererseits rechnet man leicht aus, daß

$$\Delta u = 2\cdot\left|\left(\frac{f'}{f}e^{i\alpha_0}\right)'\right|^2 \text{ ist.}$$

Die letzten beiden Beziehungen führen direkt zur Differentialgleichung

5. $f'(z) = z_0 e^{-i\alpha_0}\cdot f(z)$.

Die Integration von 5. liefert mit $\tilde{z}_0 = z_0 e^{-i\alpha_0}$

6. $f(z) = z_1\cdot e^{\tilde{z}_0 z}$.

Damit 6. auch hinreichend für die Gültigkeit von 3. ist, muß die Integrationskonstante z_0 geeignet gewählt werden. Es ist $\frac{f'}{f}e^{i\alpha_0} = z_0$ und $\frac{f''}{f}e^{2i\alpha_0} = z_0^2$. Folglich muß

7. $\mathrm{Im}^2(z_0) + \mathrm{Re}(z_0^2) = 0$ sein.

7. gilt genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ ist. Setzen wir $\mathrm{Im}(z_0) = c$, so erhalten wir endgültig

(26) $f(z) = z_1\cdot e^{\tilde{z}_0 z}$ mit $\tilde{z}_0 = ice^{-i\alpha_0}$.

Für die Betragfläche F zu (26) erhalten wir somit die Darstellung

(27) $F : \varphi = (x, y, |z_1| e^{c[\sin\alpha_0 x - \cos\alpha_0 y]})$.

Aus (27) liest man direkt ab, daß F eine Zylinderfläche ist, deren Erzeugende parallel zur x,y-Ebene sind, d.h. die Erzeugenden fallen mit den Höhenlinien der Betragfläche zusammen. Die orthogonalen Trajektorien der Erzeugendenschar sind identisch mit den Fallinien der Betragfläche. Diese Fallinien sind gleichfalls ebene Kurven, und zwar kongruente Exponentialkurven. Deswegen nennt man die Betragfläche zu $f(z)=z_1 e^{z_0 z}$ auch Exponentialzylinder .

Wir haben damit gezeigt, daß im Fall (a) Betragflächen existieren, nämlich die Exponentialzylinder, im Fall (c) hingegen nicht.

Wir fassen unsere Untersuchung zusammen in dem

Satz 4: Die einzigen Betragflächen, die zugleich Regelflächen sind, sind die Betragflächen zu

$$z_1 \cdot e^{z_0 z}\ ,\ z_1 \cdot (z-z_0)^{1+i\gamma}\ ,\ z_1 \cdot (z-z_0)\ ,\ z_1 \cdot (z-z_0)^{i\vartheta}\ .$$

Unser Satz enthält das Resultat von Ullrich: Die einzigen Betragflächen, die zugleich Torsen sind, sind der Exponentialzylinder und der Kegel der logarithmischen Spirale mit ihren Ausartungen Kreiskegel und Ebene.

Somit erhalten wir weiter den

Satz 5: Die einzigen Betragflächen, die zugleich windschiefe Regelflächen, also Regelflächen mit durchweg negativer Gaußscher Krümmung sind, sind die Betragflächen zu

$$f(z) = z_1 \cdot (z-z_0)^{i\vartheta}\ .$$

Wir wissen bereits, daß die Erzeugenden dieser windschiefen Regelfläche parallel zur x,y-Ebene verlaufen. Die Erzeugenden fallen also mit den Höhenlinien der Betragfläche zusammen. Der Darstellung (18) entnimmt man ferner, daß die Projektionen der Höhenlinien das Geradenbüschel durch den Punkt z_0 der x,y-Ebene bilden. Mithin schneiden die Erzeugenden alle die Gerade unter einem rechten Winkel, die senkrecht auf der x,y-Ebene steht und diese im Punkt z_0 durchstößt. Die Regelfläche ist folglich ein gerades Konoid. Wir betrachten ferner die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden. Diese sind identisch mit den Fallinien der Fläche. Also sind ihre Projektionen gerade die konzentrischen Kreise um z_0 . Die Fallinien selbst liegen somit auf koaxialen Kreiszylindern. Die gemeinsame Achse ist die oben genannte Leitgerade des geraden Konoids. Die Fallinien sind Raumkur-

ven, die Ullrich Exponentialwendeln nennt. Wickelt man nämlich den Kreiszylinder in die Ebene ab, so gehen diese Raumkurven in Exponentialkurven über. Sie stehen also in der gleichen Beziehung zur Exponentialkurve wie die auf dem Kreiszylinder gelegene gewöhnliche Schraubenlinie zur Geraden. Fassen wir eine dieser Wendeln ins Auge, etwa die auf dem Einheitszylinder gelegene Wendel, so gehen alle übrigen Fallinien aus ihr durch axiale Projektion (Projektion senkrecht zu der Zylinderachse) hervor.

Ullrich nennt die Betragfläche zu $f(z) = z_1(z-z_0)^{i\sigma}$ das gerade Konoid der Exponentialwendel . Er weist auch darauf hin, daß sie die einzige windschiefe Regelfläche unter den Betragflächen zur allgemeinen Potenz ist. Ihre Sonderstellung wird jedoch, so meine ich, erst durch unseren letzten Satz ins rechte Licht gerückt.

Denkt man an den eingangs erwähnten Satz von Catalan, so erkennt man, daß das gerade Konoid der Exponentialwendel für die Betragflächen die gleiche Rolle spielt wie die Wendelfläche für die Minimalflächen. Bemerkenswert ist, daß diese beiden "Ausnahmeflächen" von so verschiedenen Flächenklassen (wir zeigen später, daß die Klassen im wesentlichen, d.h. bis auf die Ebene, disjunkt sind) in beiden Fällen gerade Konoide sind. Hier das gerade Konoid der Exponentialwendel, dort das gerade Konoid der gewöhnlichen Schraubenlinie.

Die Betragfläche zu $f(z) = z_1 \cdot (z-z_0)^{i\sigma}$ trägt eine zweite Schar asymptotischer Linien, da sie durchweg eine negative Gaußsche Krümmung aufweist. Während bei der Wendelfläche diese zweite Schar asymptotischer Linien zusammenfällt mit den orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden, also den Schraubenlinien, ist dies bei dem geraden Konoid der Exponentialwendel nicht der Fall. Man rechnet leicht aus, daß in diesem Fall die Projektionen der zweiten Schar gegeneinander gedrehte, kongruente logarithmische Spiralen sind, deren asymptotischer Punkt mit dem Punkt z_0 zusammenfällt. Im Hinblick auf die asymptotischen Linien unterscheiden sich die beiden "Ausnahmeflächen" also wesentlich. Dies ist nicht verwunderlich; denn die Asymptotenlinien bilden bekanntlich nur auf Minimalflächen ein orthogonales Netz.

Zum Abschluß dieses Paragraphen gebe ich drei Abbildungen wieder, die der Arbeit [XXIV] von Ullrich entnommen sind und die beiden Regelflächen mit der interessantesten geometrischen Gestalt zeigen, nämlich die Betragfläche zu $f(z)=z^{1+i\gamma}$ bzw. zu $f(z)=z^{i\gamma}$.

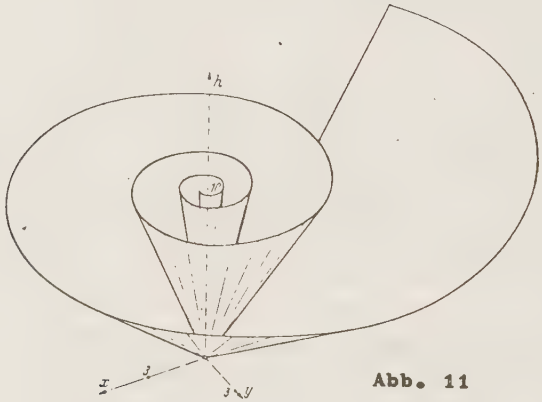


Abb. 11

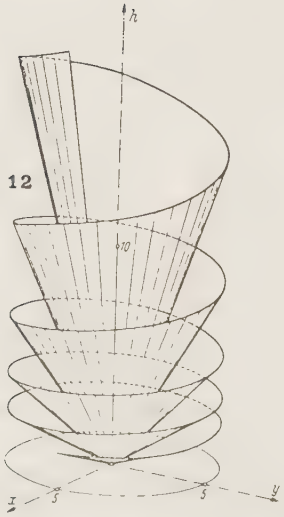


Abb. 12

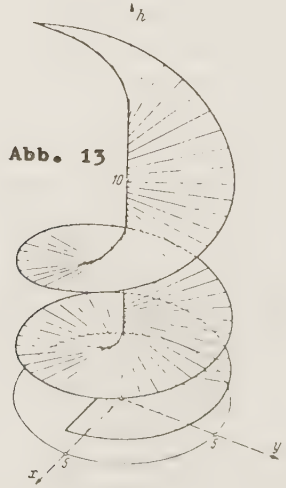


Abb. 13

Abb. 11 und Abb. 12 zeigen den Kegel zu $f(z)=z^{1+i\gamma}$, einmal mit der logarithmischen Spirale, das andere Mal mit einer Exponentialwendel als Leitkurve. Abb. 13 zeigt das gerade Konoid zu $f(z)=z^{i\gamma}$ mit einer Exponentialwendel als Direktrix.

§4 Die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung, die Minimalflächen und spezielle Schiebflächen unter den Betragflächen

4.1 Die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung und die Minimalflächen unter den Betragflächen

Beide Flächenklassen werden in jedem Lehrbuch über Differentialgeometrie ausführlich erörtert. Über die Minimalflächen heißt es bei Blaschke und Leichtweis: "Es gibt wohl kaum eine zweite Flächenfamilie, die wie die Minimalflächen die Aufmerksamkeit der größten Geometer auf sich gezogen hätte." ([II], S.33o). Einen Zugang zu dieser Flächenklasse liefert das bekannte Plateausche Problem: Gegeben sei eine einfach geschlossene Raumkurve. Man soll in diese Kurve eine Fläche mit möglichst kleiner Oberfläche einspannen.
Hat man eine (zweimal stetig differenzierbare) Fläche, die diese Forderung erfüllt, so kann man zeigen, daß auf ihr notwendig die mittlere Krümmung H identisch verschwinden muß.
Die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung sind unter anderem wegen ihrer Beziehung zur nichteuklidischen Geometrie von großem Interesse. (Man vergleiche dazu auch Hilbert [IX], S.231 ff.). Ein interessanter Zugang zu dieser Flächenklasse wird in dem Lehrbuch von Blaschke-Leichtweis beschrieben: Benutzt man die Mittelpunktseigenschaft der Kreise, um ihre Definition von der Ebene auf eine krumme Fläche zu übertragen, so gelangt man zu den geodätischen Entfernungskreisen. Benutzt man dagegen die isoperimetrische Eigenschaft der Kreise, so gelangt man zu den geodätischen Krümmungskreisen (r_g = const). Fragt man nun nach den Flächen, auf denen diese Begriffe, wie im ebenen Fall, zusammenfallen, so kann man zeigen, daß sie notwendig Flächen konstanter Gaußscher Krümmung sein müssen ([II], S.2o4 f).
Nachdem Ullrich, wie mehrfach angemerkt, alle Betragflächen bestimmt hat, deren Gaußsche Krümmung identisch verschwindet, ist es naheliegend, nach den Betragflächen zu fragen, deren Gaußsche Krümmung konstant, aber von Null verschieden ist.
Ist eine Fläche explizit durch w=w(x,y) gegeben, so erhält man für die Gaußsche Krümmung K

1. $K(x,y) = \frac{w_{xx}\, w_{yy} - w_{xy}^2}{(1+w_x^2+w_y^2)^2}$.

Für die Betragfläche $w=|f(z)|$ läßt sich nach Zaat 1. in der Form

2. $K(z) = \frac{|f''|^2}{(1+|f'|^2)^2}\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{f'^2}{ff''}\right) - 1\right\}$ schreiben.

Wir nehmen jetzt an, daß $w=|f(z)|$ eine Betragfläche mit

3. $K(z) = K_0 \neq 0$ sei. Dann gilt

4. $\mathrm{Re}\left(\frac{f'^2}{ff''}\right) - 1 = K_0 \frac{(1+|f'|^2)^2}{|f''|^2}$ identisch in z.

Wir setzen

5. $h = h(x,y) = \frac{(1+|f'|^2)^2}{|f''|^2} = \left|\frac{1}{f''}\right|^2 + 2\left|\frac{f'}{f''}\right|^2 + \left|\frac{f'^2}{f''}\right|^2$.

Aus 4. folgt, daß h harmonisch ist, d.h. es gilt

6. $\Delta h = 0$. Nun ist für jede holomorphe Funktion g

7. $\Delta|g|^2 = 4|g'|^2$. Damit erhalten wir aus 5.

8. $\Delta h = 4\left\{\left|\left(\frac{1}{f''}\right)'\right|^2 + 2\left|\left(\frac{f'}{f''}\right)'\right|^2 + \left|\left(\frac{f'^2}{f''}\right)'\right|^2\right\}$.

Aus 6. und 8. folgt direkt, daß f gleichzeitig den Differentialgleichungen

9. $\left(\frac{1}{f''}\right)' = 0$, $\left(\frac{f'}{f''}\right)' = 0$ und $\left(\frac{f'^2}{f''}\right)' = 0$ genügen muß.

Die ersten beiden liefern

1o. $f'' = a \neq 0$ und $f' = bf''$. Daraus folgt

11. $f' = az + c$ und $f' = ab$, und das ist ein Widerspruch.

Damit haben wir

Satz 6: Es gibt keine Betragflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung $K_0 \neq 0$.

Wir wenden uns nun den Minimalflächen zu. Ist eine Fläche explizit durch $w=w(x,y)$ gegeben, so erhält man für die mittlere Krümmung H

1. $H(x,y) = \frac{w_{xx}(1+w_y^2) - 2w_x w_y w_{xy} + w_{yy}(1+w_x^2)}{2\cdot(1+w_x^2+w_y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Für die Betragfläche $w=f(z)$ läßt sich nach Zaat 1. in der Form

2. $H(z) = \frac{f'^2}{2f(1+ff'^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1+f'^2\cdot\left(1-\mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)\right)\right\}$ schreiben.

Wir nehmen jetzt an, daß $w=f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ eine Betragfläche mit $H(z) \equiv 0$ sei. Dann gilt nach 2.

3. $\mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right) - 1 = \left|\frac{1}{f'^2}\right|$ identisch in z.

Also muß $h = \frac{1}{f'^2}$ harmonisch sein. Daraus folgt

4. $f' = a$ mit $a \neq 0$ und somit $f(z) = az + b$.

Die Betragfläche zu $f(z) = az+b$ ist ein gerader Kreiskegel, und damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 7: Es gibt außer der Ebene keine Minimalfläche unter den Betragflächen. [1)]

4.2 Spezielle Schiebflächen unter den Betragflächen

In den vorangegangenen Paragraphen ist es uns jeweils gelungen, alle Betragflächen zu bestimmen, denen eine gewisse Eigenschaft zukommt. In diesem Paragraphen müssen wir uns damit begnügen, Beispiele für Betragflächen anzugeben, die zugleich Schiebflächen sind. Allerdings wird es uns gelingen, alle holomorphen Funktionen zu bestimmen, deren Betrag der partiellen Differentialgleichung $w_{xy} = 0$ genügt.

Gegeben seien zwei glatte Raumkurven $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ mit den Darstellungen

$$\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u) \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_2 : \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(v),$$

die sich im Nullpunkt O schneiden. Verschiebt man $\mathfrak{L}_1$ parallel derart, daß der Punkt O längs $\mathfrak{L}_2$ wandert, so entsteht eine Schiebfläche mit der Darstellung

(1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{r}(u) + \mathfrak{r}(v)$.

Die gleiche Fläche entsteht, wenn man entsprechend $\mathfrak{L}_2$ längs $\mathfrak{L}_1$ verschiebt. Auf der Fläche (1) sind die Parameterlinien $v = \text{const}$ bzw. $u = \text{const}$ schiebungskongruent zu den Grundkurven $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_2$.

Umgekehrt ist jede Fläche, auf der es zwei solche schiebungskongruenten Kurvenscharen gibt, eine Schiebfläche, die bezogen auf die Schiebkurven eine Darstellung der Form (1) hat. Die beiden Scharen von Schiebkurven bilden auf der Fläche ein konjugiertes Netz. (Man vergleiche Strubecker [XXIII], S.55ff.).

Ist eine Fläche in der expliziten Form

1. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(x,y) = (x,y,w(x,y))$ gegeben, so ist sie sicher eine Schiebfläche, wenn
2. $w(x,y) = g(x) + h(y)$ gilt, d.h. wenn $w = w(x,y)$ der Differentialgleichung
3. $w_{xy} = 0$ genügt.

Geht man z.B. mit dem Ansatz $w=g(x)+h(y)$ in die Differentialgleichung

$$w_{xx}\,(1+w_y^2) - 2w_x w_y w_{xy} + w_{yy}\,(1+w_x^2) = 0$$

---

1) Ullrich weist in einer Bemerkung am Schluß seiner Arbeit ([XXIV], S.328) auf diesen Sachverhalt hin und nennt auch den hier zur Anwendung gekommenen Beweisgedanken.

der Minimalflächen ein, so gelangt man zu den bekannten Scherkschen Minimalflächen.

Wir werden das gleiche für die Betragflächen tun. Im Prinzip könnte man auch hier mit dem Ansatz $w = g(x) + h(y)$ in die Differentialgleichung $w(w_{xx} + w_{yy}) = w_x^2 + w_y^2$ der Betragflächen eingehen und damit g und h geeignet bestimmen. Einfacher ist der Weg, den wir beschreiten.

Ist $w = |f(z)|$ mit holomorphem f gegeben, so ist

1. $w_{xy} = |f| \left\{ \mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) \mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) - \mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f}\right) \right\}$.

Daraus folgt mit $\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) \mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}\left(\frac{f'^2}{f^2}\right)$

2. $w_{xy} = \frac{1}{2}|f| \mathrm{Im}\left(\frac{f'^2 - 2ff''}{f^2}\right)$.

Mithin genügt $w = |f(z)|$ genau dann der partiellen Differentialgleichung $w_{xy} = 0$, wenn f der gewöhnlichen Differentialgleichung

(2) $\frac{f'^2 - 2f''f}{f^2} = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ genügt.

Sei zunächst $c=0$.

Da die triviale Lösung $f(z) \equiv \text{const}$ nicht interessiert, erhalten wir aus (2)

3. $\frac{f'^2}{f''f} = 2$. Die Integration von 3. bereitet keine Schwierigkeit und führt auf

4. $f(z) = (az + b)^2$. Die zugehörige Betragfläche ist ein Rotationsparaboloid.

Sei nun $c \neq 0$.

Addieren wir auf beiden Seiten von (2) $\frac{f'^2}{f^2}$, so gelangen wir zu

5. $\left(\frac{f'}{f}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{c}{2} = 0$.

Aus 5. liest man ab, daß

6. $\left(\frac{f'}{f}\right)' = 0 \Longleftrightarrow \frac{f'}{f} = \sqrt{-c}$ gilt.

Das führt auf die Lösungen

7. $f(z) = a\, e^{\sqrt{-c}\, z}$. Die zugehörige Betragfläche ist ein Exponentialzylinder, dessen Erzeugende gegeben sind durch $x = \text{const}$ für $\sqrt{-c} \in \mathbb{R}$ bzw. durch $y = \text{const}$ für $\sqrt{-c} = ik$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Setzen wir jetzt

8. $v(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, so erhalten wir aus 5. die besonders einfache Riccati - Differentialgleichung

9. $v' + \frac{1}{2} v^2 + \frac{c}{2} = 0$.

Da der Fall v'=0 bereits betrachtet wurde, können wir 9. durch "Trennung der Veränderlichen" lösen und kommen so zu

1o. $v = \sqrt{c}\tan(-a - \frac{1}{2}\sqrt{c}\,z)$,

und aus 8. und 1o. erhalten wir durch Ausführung der zweiten Integration

11. $f(z) = b\cos^2(a + \frac{1}{2}\sqrt{c}\,z)$.

Damit sind alle Lösungen der Differentialgleichung (2) ermittelt. Wir fassen das Ergebnis zusammen in dem

Satz 8: Die einzigen holomorphen Funktionen, deren Betrag der partiellen Differentialgleichung $w_{xy} = 0$ genügt, sind die Funktionen

$f(z)=(az+b)^2$, $f(z)=ae^{kz}$, $f(z)=b\cdot\cos^2(a+kz)$;

dabei ist k entweder reell oder rein imaginär.

Die zugehörigen Betragflächen sind Schiebflächen, wobei die Schiebkurven in den Koordinatenebenen x=const bzw. y=const liegen.

Wir wollen uns zu $f(z) = b\cdot\cos^2(a+kz)$ noch den Betrag für reelles k und $a=\alpha+i\beta$ notieren. Man erhält

12. $|f(z)| = |b|\cos^2(\alpha+kx) + b|\sinh^2(\beta+ky)$.

Unsere Betrachtung über Schiebflächen hatte uns zu der Differentialgleichung

(2) $\frac{f'^2 - 2f''f}{f^2} = c$ mit $c\in\mathbb{R}$ geführt.

Betrachtet man die Differentialgleichung für $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, so erhält man ersichtlich Lösungen, deren zugehörige Betragflächen aus den bereits bestimmten durch Drehung um die w-Achse hervorgehen. Die Lösungen von (2) weisen also für festes c eine Gemeinsamkeit auf; denn ihre Betragflächen tragen jeweils ein konjugiertes Netz mit den Projektionen $\mathrm{Re}(z_0 z)$ = const und $\mathrm{Im}(z_0 z)$ = const , wobei $\arg z_0 = \frac{1}{2}\arg c$ ist. Es liegt somit nahe, die Differentialgleichung (2) mit "variabler rechter Seite" c(z) zu betrachten und zu fragen, ob für die Lösungen entsprechende Gemeinsamkeiten bestehen.

Ist eine Fläche in der expliziten Form w=w(x,y) gegeben, so lautet die Bedingungsgleichung für die konjugierten Richtungen

1. $w_{xx}dx\delta x + w_{xy}(dx\delta y + dy\delta x) + w_{yy}dy\delta y = 0$.

Ist gleichzeitig $w_{xy} = 0$ und $w_{xx} = w_{xy} \neq 0$, so reduziert sich 1. auf

2. $dx\delta x + dy\delta y = 0$. Bei den gemeinsamen (nicht ebenen) Integralflächen von $w_{xy} = 0$ und $w_{xx} - w_{yy} = 0$, also bei den Rotationsparaboloiden zu $w=a(x^2+y^2)+bx+cy+d$ mit $a\neq 0$, entsprechen den konjugierten Richtungen auf der Fläche die orthogonalen Richtungen der x,y-Ebene.

Sieht man von diesem Sonderfall ab, so läßt sich mit Hilfe von 1. sehr leicht zeigen, daß auf der Fläche $w = w(x,y)$ genau ein konjugiertes Netz existiert, dem in der x,y -Ebene ein orthogonales Netz entspricht.

Wir werden jetzt zeigen, daß für die Betragfläche zu f(z) eine (im wesentlichen eindeutig bestimmte) holomorphe Funktion g(z) existiert, so daß das orthogonale Netz durch $Re(g(z))=$ const und $Im(g(z))=$const gegeben ist.

Nehmen wir an, daß

3. $g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine derartige Funktion wäre, so folgt aus 1.

4. $w_{xx}u_yv_y + w_{xy}(-u_yv_x - u_xv_y) + w_{yy}u_xv_x = 0$.

Bei $w=|f(z)|$ ist ferner

5.
$$w_{xx} = |f|\left\{Im^2\left(\frac{f'}{f}\right) + Re\left(\frac{f''}{f}\right)\right\},\quad w_{xy} = |f|\left\{Im\left(\frac{f'}{f}\right)Re\left(\frac{f'}{f}\right) - Im\left(\frac{f''}{f}\right)\right\},$$
$$w_{yy} = |f|\left\{Re^2\left(\frac{f'}{f}\right) - Re\left(\frac{f''}{f}\right)\right\} .$$

Tragen wir dies in 4. ein, so erhalten wir nach einfachen Umformungen als notwendige Bedingung für g(z)

6. $$Im\left\{\frac{f'^2 - 2ff''}{f^2}\cdot\frac{1}{g'^2}\right\} = 0 \qquad \text{und damit}$$

7. $$\frac{f'^2 - 2ff''}{f^2}\cdot\frac{1}{g'^2} = k \quad \text{mit } k\in\mathbb{R}.$$

Bestimmt man umgekehrt bei gegebenem $f(z) \neq (az+b)^2$ g(z) aus

8. $g'^2 = \frac{f'^2 - 2ff''}{f^2}$, so hat g(z) die geforderte Eigenschaft.

Damit haben wir

<u>Satz 9:</u> Die Betragflächen der Lösungen von

(3) $$\left(\frac{f'}{f}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{1}{2}c(z) = 0$$

tragen jeweils ein konjugiertes Netz, dessen Projektion gegeben ist durch $Re(g(z))=$const und $Im(g(z))=$ const , wobei $g'^2 = c(z)$ ist.

Wir wollen zum Schluß noch anmerken, daß sich die Differentialgleichung (3) vermöge $f(z)=h^2(z)$ vereinfacht zu

(4) $$\frac{h''}{h} + \frac{1}{4}c(z) = 0.$$

Ferner geht aus unserer Ableitung hervor, daß wir stets durch eine holomorphe Funktion $z = x(u,v) + iy(u,v)$ die Gaußschen Parameter x und y der Betragfläche so transformieren können, daß die Parameterlinien u=const und v=const ein konjugiertes Netz bilden.

II BETRAGFLÄCHEN MIT BESONDERHEITEN DER HÖHEN- BZW. FALLLINIEN

§1 Die Betragflächen, auf denen das Netz der Krümmungslinien zusammenfällt mit dem Netz der Höhen- und Fallinien

1.1 Vorbetrachtungen

Eine Fläche sei in der expliziten Form

1. $w = w(x,y)$ gegeben. Schneiden wir die Fläche mit den Ebenen, die parallel zur x,y-Ebene verlaufen, so erhalten wir die Höhenlinien (Schichtlinien, Niveaulinien). Konstruieren wir zu dieser Kurvenschar die orthogonalen Trajektorien, so gelangen wir zu den Fallinien (Linien größten Anstieges bzw. stärksten Gefälles) der Fläche.

Die Projektionen der Höhenlinien sind zu den Höhenlinien kongruent, und ihre Schar ist gegeben durch

2. $w(x,y) = c$ (c: Scharparameter) .

Somit erhalten wir als Differentialgleichung für die Projektionen der Höhenlinien

(1) $w_x dx + w_y dy = 0$.

Da die Höhenlinien der x,y-Ebene parallel sind, müssen auch die Projektionen der Fallinien die orthogonalen Trajektorien der Projektionen der Niveaulinien sein. Demnach erhalten wir aus (1) als Differentialgleichung für die Projektionen der Fallinien

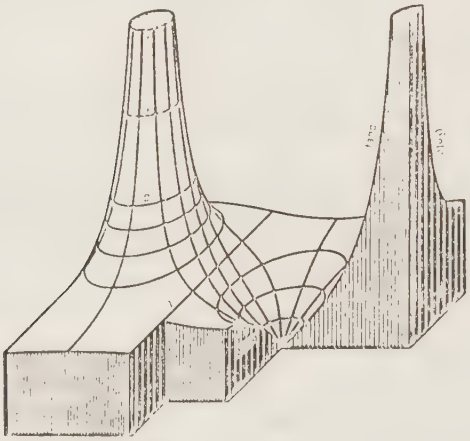
(2) $w_x dy - w_y dx = 0$.

Ferner folgt aus dem geschilderten Zusammenhang für die Betragfläche zu f(z), wenn man noch die Konformität der durch $\zeta = f(z)$ vermittelten Abbildung bedenkt, daß die Projektionen der Fallinien durch

(3) $\arg f(z) = \text{const}$ gegeben sind.

Zeichnet man auf den Betragflächen die Höhen- und Fallinien, also die Kurven konstanten Betrages und konstanten Argumen-

tes der betreffenden Funktion ein, so gewinnt man ein anschauliches Bild des Funktionsverlaufes. Die folgende Abbildung, die den"Funktionentafeln" von Jahnke - Emde entnommen ist, soll dies verdeutlichen.



f(z) = tan z

Abb. 14

Als nächstes wollen wir die Krümmung der Höhen- und Fallinienprojektionen berechnen.

Ist auf dem betrachteten Flächenstück $w_x \neq 0$ und $w_y \neq 0$, so ist die Differentialgleichung (1) äquivalent zu dem System

3. $\frac{dx}{dt} = -w_y$, $\frac{dy}{dt} = w_x$. Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung x=x(t), y=y(t) ist die Krümmung gegeben durch

4. $\varkappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$.

Aus 3. und 4. erhalten wir für die Krümmung der Höhenlinienprojektion im Punkt (x,y)

(4) $\varkappa_H(x,y) = \frac{w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy}}{(w_x^2 + w_y^2)^{3/2}}$.

Entsprechend erhält man für die Projektionen der Fallinien

(5) $\varkappa_F(x,y) = \frac{w_{xy}(w_y^2 - w_x^2) + w_x w_y (w_{xx} - w_{yy})}{(w_x^2 + w_y^2)^{3/2}}$.

Nun gilt für die Betragfläche $w = |f(z)|$, wie man nach leichter Rechnung bestätigt,

(6) $w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = \frac{|f'|^4}{|f|} \cdot \left\{1 - \mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)\right\}$ und

(7) $w_{xy}(w_y^2 - w_x^2) + w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) = \frac{|f'|^4}{|f|} \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)$.

Damit geht (4) bzw. (5) über in

(8) $\varkappa_H(z) = \left|\frac{f'}{f}\right|\left\{1-\mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)\right\} = \left|\frac{f'}{f}\right|\mathrm{Re}\left(\frac{f}{f'}'\right)$ bzw.

(9) $\varkappa_E(z) = \left|\frac{f'}{f}\right|\mathrm{Im}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right) = -\left|\frac{f'}{f}\right|\mathrm{Im}\left(\frac{f}{f'}'\right)$.

Neben den Höhen- und Fallinien werden uns auch die zu diesen Linien konjugierten Kurven beschäftigen. Aus der Bedingungsgleichung für die konjugierten Richtungen

5. $w_{xx}\,dx\delta x + w_{xy}(dx\delta y + dy\delta x) + w_{yy}\,dy\delta y = 0$

folgt mit Hilfe von (1) bzw. (2), daß die Projektionen der gesuchten Scharen durch

(1o) $\frac{w_x}{w_y} = a$ (a: Scharparameter) bzw.

(11) $w_x^2 + w_y^2 = b$ (b: Scharparameter) gegeben sind.

Für die Betragflächen folgt aus (1o) und (11) sofort

Satz 1o: Die Projektion der zu den Höhenlinien konjugierten Schar ist durch $\arg\frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ gegeben.[1)]

Die Projektion der zu den Fallinien konjugierten Schar ist durch $|f'(z)| = \text{const}$ gegeben.

Vergleicht man (1) und (1o), so erkennt man, daß die Schar (1o) gerade die Isoklinen der Höhenlinienprojektionen sind. Betrachtet man eine feste Kurve $\mathcal{L}$ aus der Schar der zu den Höhenlinien konjugierten Kurven, so weisen die Höhenlinien demnach längs $\mathcal{L}$ parallele Tangenten auf. Betrachtet man ferner die zu $\mathcal{L}$ gehörige berührende Torse T, dann ist bekanntlich jede Erzeugende von T konjugiert zu der zugehörigen Tangente von $\mathcal{L}$. Also ist die berührende Torse T ein Zylinder, die Kurve $\mathcal{L}$ eine zylindrische Flächenkurve.

Auch die Torse T, welche die vorgelegte Fläche längs einer Kurve $\mathcal{L}$ aus der Schar der zu den Fallinien konjugierten Kurven berührt, weist eine bemerkenswerte Besonderheit auf. Zunächst ist der Flächennormalenvektor gegeben durch

(12) $\mathfrak{n} = \frac{1}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}}\cdot(-w_x, -w_y, 1)$. Aus (11) und (12) folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{n}$ mit der Richtung $\mathfrak{n}_3 = (0,0,1)$ der w-Achse längs $\mathcal{L}$ einen konstanten Winkel einschließt, oder anders ausgedrückt, daß die Tangentialebenen längs $\mathcal{L}$ eine konstante Neigung gegen die x,y-Ebene aufweisen. Ferner sind in jedem

---

1) Dieses Ergebnis hat bereits Zaat auf anderem Wege in seiner Dissertation ([XXVI], S.18 f) gewonnen.

Punkt (x,y,w(x,y)) mit $(w_x, w_y) \neq (0,0)$ die Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_3$ und der Richtungsvektor der Fallinientangente komplanar; denn sie liegen in einer Ebene, die durch den genannten Punkt geht und senkrecht auf der Höhenlinientangente dieses Punktes steht. Mithin schließen die Fallinientangenten längs $\tilde{\mathfrak{L}}$ gleichfalls einen festen Winkel mit $\mathfrak{n}_3$ ein. Die berührende Torse T ist also eine Böschungstorse. Ihre Rückkehrkante, die Enveloppe der Fallinientangenten längs $\tilde{\mathfrak{L}}$, ist eine Böschungslinie. Die Projektion der Rückkehrkante in die x,y-Ebene kann man folgendermaßen erhalten: Man bringt die Fallinientangenten längs $\tilde{\mathfrak{L}}$ mit der x,y-Ebene zum Schnitt und erhält so eine Kurve $\mathfrak{L}^*$, (Die gleiche Kurve erhält man, wenn man die Tangentialebenen längs $\tilde{\mathfrak{L}}$ mit der x,y-Ebene schneidet und dann die Enveloppe dieser Spurgeradenschar bildet.) Konstruiert man jetzt zu $\mathfrak{L}^*$ die Evolute, so hat man die gesuchte Projektion.

In den folgenden Abschnitten werden wir, Reimerdes folgend (Reimerdes [XIX], S.7 ff), Differentialgleichungen für die Flächen ableiten, auf denen die Niveau- oder Fallinien differentialgeometrische Besonderheiten aufweisen. Wir werden dann jeweils alle Betragflächen bestimmen, die derartige Eigenschaften haben.

1.2 Das Zusammenfallen der Höhen- und Fallinien mit den Krümmungslinien

Da sowohl die Höhen- und Fallinien als auch die Krümmungslinien ein orthogonales Netz auf der Fläche $w = w(x,y)$ bilden, ist unmittelbar folgendes klar: Bilden die Höhen- bzw. die Fallinien die eine Schar der Krümmungslinien, so fällt die andere Schar der Krümmungslinien mit den Fall- bzw. Höhenlinien zusammen.

Also liegt bei den gesuchten Flächen stets das eine System der Krümmungslinien in parallelen Ebenen.

Das Problem der Bestimmung der Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien ist Gegenstand zahlreicher differentialgeometrischer Untersuchungen. Eine wissenschafts - historische Betrachtung zu diesen Arbeiten hat Karin Reich durchgeführt (Reich [XVIII], S. 337 ff). Wir gehen auf diese Arbeiten nicht näher ein, da wir, im Gegensatz zu Reimerdes, die

notwendigen Ergebnisse sehr elementar herleiten werden.
Die Differentialgleichung für die Krümmungslinien lautet

(13) $\left[w_x w_y w_{xx} - (1+w_x^2)w_{xy}\right] dx^2 + \left[(1+w_y^2)w_{xx} - (1+w_x^2)w_{yy}\right] dxdy$
$+\left[(1+w_y^2)w_{xy} - w_x w_y w_{yy}\right] dy^2 = 0.$

Aus (1) und (13) oder auch aus (2) und (13) erhält man als Differentialgleichung für die gesuchten Flächen (vergleiche Reimerdes[X|X], S. 8f)

(14) $w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2) = 0$.

Ein Vergleich von (5) und (14) lehrt, daß das Netz der Höhen- und Fallinien genau dann mit dem Netz der Krümmungslinien zusammenfällt, wenn die Fallinienprojektionen eine Geradenschar bilden, d.h. die Fallinien sind ebene Kurven (im Spezialfall selbst Geraden), deren Ebenen senkrecht auf der x,y-Ebene stehen. Bedenken wir, was wir in 1.1 über die Vektoren ν, ν_3, $\mathfrak{k}_F$ (Richtungsvektor der Fallinientangente), $\mathfrak{k}_n$ (Richtungsvektor der Höhenlinientangente) gesagt haben, und bezeichnen wir die Ebene, in der die durch (x,y,w(x,y)) laufende Fallinie liegt, mit E, so liegt die folgende Situation vor:

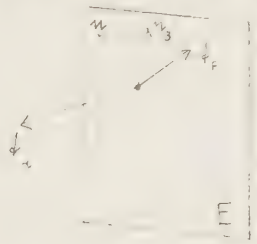


Abb. 15

Aus der Abbildung liest man direkt ab, daß die Normalen der ebenen Fallinien mit den Flächennormalen zusammenfallen. Die Fallinien sind also zugleich geodätische Linien der Fläche. Ferner erkennt man, daß die Fläche selbst die einparametrige Schar der Ebenen, in denen die Fallinien liegen, senkrecht durchsetzt. Unsere Flächen sind also orthogonale Trajektorienflächen einer einparametrigen Schar von Ebenen, wobei jede Ebene der Schar senkrecht auf einer festen Ebene steht. Die Ebenen bilden also entweder ein Büschel, oder sie sind die Berührebenen eines Zylinders. Die gesuchten Flächen sind somit spezielle Gesimsflächen. Es gibt eine sehr einfache mechanische Erzeugung der Gesimsflächen: " Man zeichnet auf einer der Tangentenebenen der ganz beliebig anzunehmenden Torse eine beliebige Kurve $\tilde{\sim}$. Läßt man dann die Tangentenebene ohne zu gleiten auf der Torse rollen, so daß sie diese

immer längs einer Erzeugenden berührt, so beschreibt $\tilde{\Sigma}$ die allgemeinste Gesimsfläche ." (Blaschke - Leichtweiß [II], S. 187)

Wir hatten uns überlegt, daß die Fallinien im vorliegenden Falle zugleich geodätische Linien waren. Nehmen wir nun umgekehrt an, daß die Fallinien geodätische Linien sind, so entnehmen wir der Abb. , daß die Binormale der Fallinie im Punkt (x,y,w(x,y)) zusammenfällt mit der Höhenlinientangente durch diesen Punkt. Der Binormalenvektor $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(s)$ steht also beständig senkrecht auf $\mathfrak{v}_3$, d.h. es gilt $\mathfrak{b}(s) \cdot \mathfrak{v}_3 = 0$. Daraus folgt aber $\mathfrak{b}'(s) \cdot \mathfrak{v}_3 = 0$. Wäre $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{o}$, so müßte nach den Frenetschen Ableitungsformeln $\mathfrak{v}'$ parallel bzw. antiparallel zu $\mathfrak{b}$ sein, d.h. es müßte auch $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}_3 = 0$ gelten, und das steht im Widerspruch zu (12). Also muß $\mathfrak{b}(s)$ konstant sein, und die Fallinie ist folglich eine ebene Kurve, wobei die Ebene senkrecht auf der x,y-Ebene steht. Damit folgt aus (5) [1]: Die Flächen w = w(x,y), deren Fallinien zugleich geodätische Linien sind, sind gerade die Integralflächen von (14).
Man kann (14) auch aus der Differentialgleichung der Geodätischen und der Differentialgleichung der Fallinien von w = w(x,y) gewinnen. Diesen Weg beschreitet Reimerdes (Reimerdes [IX], S. 7 f).
Für die Betragflächen erhalten wir aus unseren Betrachtungen unter Beachtung von (9) das folgende Zwischenresultat: Die Betragflächen w = f(z) , deren Fallinien zugleich geodätische Linien sind oder, was äquivalent dazu ist, deren Höhen- und Fallinien zusammenfallen mit den Krümmungslinien, sind charakterisiert durch

(15) $\frac{f}{f'} = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Aus (15) gewinnen wir unmittelbar

Satz 11: Die einzigen Betragflächen, deren Fallinien zugleich geodätische Linien sind, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{\dots}$ und die Rotationsflächen zu $f(z) = (az+b)^{\dots}$ mit $\dots \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Diese Betragflächen sind auch die einzigen, auf denen das Netz der Krümmungslinien zusammenfällt mit dem Netz der Höhen-

---

1) Man könnte hier auch den Satz heranziehen, daß jede ebene geodätische Linie zugleich eine Krümmungslinie ist.

und Fallinien. Ferner sind sie die einzigen, bei denen die Projektionen der Fallinien eine Geradenschar bilden.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir uns noch ganz allgemein mit der Differentialgleichung (14) beschäftigen, obwohl wir bereits ausreichende Kenntnisse über die Geometrie der Integralflächen haben.

Zunächst rechnet man leicht nach, daß sich (14) auch in der Form

(16) $w_x \frac{\partial}{\partial y}(w_x^2 + w_y^2) - w_y \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2 + w_y^2) = 0$ bzw.

(17) $w_x \frac{\partial}{\partial x}(\frac{w_x}{w_y}) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(\frac{w_x}{w_y}) = 0$ bzw.

(18) $w_x \frac{\partial}{\partial x}(\frac{w_y}{w_x}) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(\frac{w_y}{w_x}) = 0$ schreiben läßt.

Bedenkt man, daß die Krümmungslinien ein konjugiertes Netz bilden, und beachtet man ferner, was wir in 1.1 über die Konjugierten der Höhen- bzw. Fallinien ausgesagt haben, so sind diese Umformungen auch geometrisch verständlich; denn (16) besagt einfach, daß die Scharen $w(x,y) = \text{const}$ und $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ zusammenfallen, und (17) bzw. (18) bringen zum Ausdruck, daß sich die Scharen $w(x,y) = \text{const}$ und $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ senkrecht schneiden. Aus den durchgeführten Umformungen liest man ferner ab, daß die (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen von

(19) $w_x^2 + w_y^2 = a^2$ und

(2o) $aw_x + bw_y = 0$ mit $a^2 + b^2 > 0$ zugleich Lösungen von (14) sind.

Die Differentialgleichung (19) wird ausführlich in dem Lehrbuch von Courant - Hilbert untersucht (Courant - Hilbert IV, S. 74 ff). Die Integralflächen von (19) sind die Böschungstorsen. Ihre Erzeugenden sind identisch mit den Fallinien und weisen konstante Neigung gegen die x,y-Ebene auf. Die Integralflächen von (2o) sind bekanntlich die allgemeinen Zylinderflächen, deren Erzeugende parallel zur x,y-Ebene verlaufen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die eben aufgeführten Torsen die einzigen abwickelbaren Integralflächen von (14) sind, also die einzigen Lösungen von (14), die zugleich der Differentialgleichung

(21) $w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = 0$ genügen.

Da die Lösungen von $w_x = 0$ bzw. $w_y = 0$ zugleich Lösungen von (14) und (21) sind und da sie ferner durch (2o) für b=0 bzw. a=0 erfaßt sind, nehmen wir im folgenden stets $w_x \neq 0$ und $w_y \neq 0$ an.

Es ist

$$1.\quad \cdot \Big(w_x w_{xy} + w_y \frac{w_{yy} - w_{xx}}{2} - w_y \Big[w_{xy}^2 + \frac{1}{4}(w_{yy} - w_{xx})^2 \Big]^{\frac{1}{2}}\Big)$$
$$\cdot \Big(w_x w_{xy} + w_y \frac{w_{yy} - w_{xx}}{2} - w_y \Big[w_{xy}^2 + \frac{1}{4}(w_{yy} - w_{xx})^2 \Big]^{\frac{1}{2}}\Big)$$
$$= w_{xy}\Big[w_{xy}(w_x^2 - w_y^2) + w_x w_y (w_{yy} - w_{xx})\Big].$$

Aus (14) und (21) folgt unter Berücksichtigung von 1.

$$2.\quad (w_x w_{xy} + w_y w_{yy}) \cdot (w_x w_{xy} - w_y w_{xx}) = 0 \quad \text{und damit}$$

$$3.\quad \frac{\partial}{\partial y}(w_x^2 + w_y^2) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$4.\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{w_y}{w_x}\Big) = 0. \quad \text{Aus 3. und (16) bzw. 4. und (18) folgt}$$

$$5.\quad \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2 + w_y^2) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$6.\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{w_y}{w_x}\Big) = 0. \quad \text{Aus 3. und 5. folgt (19), aus 4. und 6.}$$

erhalten wir (2o). Damit sind die Lösungen von (14), die zugleich (21) genügen, tatsächlich charakterisiert durch (19) und (2o).

Da die "Komplikationen" in der Differentialgleichung (14) ersichtlich bei den Ableitungen erster Ordnung liegen, ist es naheliegend, die Differentialgleichung (14) mit der Legendreschen Transformation zu bearbeiten. Wir setzen also

(22) $\xi = w_x, \eta = w_y$ und

(23) $\omega(\xi, \eta) + w(x,y) = x\xi + y\eta$. Dann erhält man bekanntlich

(24) $\omega_\xi = x, \omega_\eta = y$ und

(25) $\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 = \dfrac{1}{w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}$, und mit

(26) $D = w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2$ erhält man ferner

(27) $w_{xx} = D\omega_{\eta\eta}$, $w_{xy} = -D\omega_{\xi\eta}$, $w_{yy} = D\omega_{\xi\xi}$.

Mit (22) und (27) geht (14) über in

$$1.\quad \xi\eta(\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi}) - \omega_{\xi\eta}(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

Die Lösungen, die bei dieser Transformation verlorengehen, sind bereits durch (19) und (2o) charakterisiert.

Geht man vermöge

$$2.\quad \xi = \varrho\cos\varphi, \eta = \varrho\sin\varphi$$ zu Polarkoordinaten über, so erhält man aus 1. die Differentialgleichung

3. $\varrho\cdot\omega_{\varrho\psi}-\omega_{\psi}=0$, die sich leicht integrieren läßt. Die Lösungen von 3. sind gegeben durch

4. $\omega=\omega(\varrho,\psi)=g(\varrho)+\varrho\,h(\psi)$. Dabei müssen die "willkürlichen" Funktionen g und h zweimal stetig differenzierbar sein, und es muß

5. $\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta}-\omega_{\xi\eta}^2=\frac{1}{\varrho^2}\left(\omega_{\varrho\varrho}\omega_{\psi\psi}-\omega_{\varrho\psi}^2+\varrho\omega_{\varrho}\omega_{\varrho\varrho}+\frac{2}{\varrho}\omega_{\psi}\omega_{\varrho\psi}-\frac{1}{\varrho^2}\omega_{\psi}^2\right)\neq 0$ sein.

Aus 4. folgt leicht, daß 5. gleichbedeutend ist mit

6. $\frac{d\tilde{g}}{d\varrho^2}\neq 0$.

Berücksichtigt man ferner

7. $\omega_{\xi}=\cos\psi\,\omega_{\varrho}-\frac{1}{\varrho}\sin\psi\,\omega_{\psi}$, $\omega_{\eta}=\sin\psi\,\omega_{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\cos\psi\,\omega_{\psi}$,

so erhält man die folgende Parameterdarstellung für die nicht abwickelbaren Integralflächen von (14):

$$(28)\qquad \begin{aligned} x&=\left(\frac{dg}{d\varrho}+h(\psi)\right)\cos\psi-\frac{dh}{d\psi}\sin\psi,\quad y=\left(\frac{dg}{d\varrho}+h(\psi)\right)\sin\psi+\frac{dh}{d\psi}\cos\psi,\\ w&=\varrho\frac{dg}{d\varrho}-g(\varrho),\qquad \frac{d^2g}{d\varrho^2}\neq 0. \end{aligned}$$

Die Parameterlinien $\varrho=\text{const}$ und $\psi=\text{const}$ sind die Krümmungslinien der Fläche. Die Linien $\psi=\text{const}$ sind zu der Profilkurve $\tilde{c}$, die die Gesimsfläche erzeugt, kongruent. Aus (28) folgt, daß die geometrische Gestalt von $\tilde{c}$ durch $g(\varrho)$ bestimmt wird und daß der Zylinder, in dessen Tangentialebenen die Linien $\psi=\text{const}$ liegen, durch $h(\psi)$ bestimmt wird. Gilt insbesondere $\frac{dh}{d\psi}=c_1\cos\psi+c_2\sin\psi$, so erhält man die Rotationsflächen.

Hiermit wollen wir diesen Paragraphen beenden. Die Erörterungen des nächsten Paragraphen werden uns nochmal zu der hier ausführlich diskutierten Differentialgleichung (14) hinführen.

§2 Die Betragflächen, auf denen die eine Schar der Asymptotenlinien zusammenfällt mit den Höhen- bzw. Fallinien

2.1 Das Zusammenfallen von Höhenlinien und Asymptotenlinien

Wir folgen zunächst dem von Reimerdes eingeschlagenen Weg und bestimmen die Differentialgleichung der gesuchten Flächen aus der Differentialgleichung

(1) $w_{xx}\,dx^2+2w_{xy}\,dxdy+w_{yy}\,dy^2=0$ der asymptotischen Linien und der Differentialgleichung der Höhenlinien (Reimerdes XIX, S. 1o f).

Man erhält unmittelbar

(2) $w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = 0$ als Differentialgleichung für die Flächen, deren Höhenlinien zugleich asymptotische Linien sind.

Wir können nun auf Grund der Formel (4) aus §1 sofort sagen, von welcher Art die Integralflächen von (2) sind; denn aus der genannten Formel folgt, daß die Projektionen der Höhenlinien eine Geradenschar bilden. Also sind die Integralflächen von (2) Regelflächen, deren Erzeugende parallel zur x,y - Ebene verlaufen.

Sind die Erzeugenden einer Regelfläche zu einer festen Ebene (Richtebene) parallel, so bezeichnet man die Fläche nach Ernest Vessiot als konoidale Regelfläche.

Hat man umgekehrt eine zweimal stetig differenzierbare konoidale Regelfläche und wählt man die Richtebene als x,y - Ebene, so läßt sich die Fläche lokal durch eine Funktion $w = w(x,y)$ beschreiben, die der Differentialgleichung (2) genügt.

Man kann die Differentialgleichung (2) auch ohne zusätzliche Rechnung erhalten; denn bekanntlich fallen die Schmiegebenen einer Asymptotenlinie auf einer Fläche, falls sie existieren, mit den Tangentialebenen der Fläche zusammen. Sind also die Höhenlinien von $w = w(x,y)$ zugleich Asymptotenlinien, so müssen sie geradlinig sein, da andernfalls $w_x \equiv 0$ und $w_y \equiv 0$ gelten müßte. Damit folgt aber aus §1, (4) die Differentialgleichung (2).

Für eine spätere Anwendung ist noch folgende Bemerkung wichtig: Ist eine Regelfläche in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{m}(u) + v\cdot\mathfrak{y}(u)$$

gegeben, so ist sie offenbar genau dann eine konoidale Regelfläche, wenn

(3) $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}'') \equiv 0$ gilt; denn nur in diesem Falle sind die Vektoren $\mathfrak{y}(u)$, $\mathfrak{y}'(u)$, $\mathfrak{y}''(u)$ für alle u komplanar, d.h. nur in diesem Falle ist die sphärische Indikatrix Teil eines Großkreises der Kugel (einschließlich der Ausartung in einen Punkt).

Für die Betragflächen folgt aus (2) und der Formel (8) aus §1 als Zwischenresultat: Die Betragflächen $w = |f(z)|$, deren Höhenlinien zugleich asymptotische Linien sind, sind charak-

terisiert durch

(4) $\left[\frac{f}{f'}\right]' = ic$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Aus (4) oder auch aus Satz 4 erhalten wir

Satz 12: Die einzigen Betragflächen, deren Höhenlinien zugleich asymptotische Linien sind, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{\lambda z+b}$ und die geraden Konoide zu $f(z) = (az+b)^{\beta}$ mit $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir wollen uns jetzt ganz allgemein mit der Differentialgleichung (2) befassen und, wie angekündigt, eine Beziehung zur Differentialgleichung (14) aus §1 herleiten. Dazu gehen wir aus von einer Lösung

1. $w = g(x,y)$ der Differentialgleichung (2). Die Differentialgleichung der Fallinien (§1,(2)) lautet dann

2. $-g_y dx + g_x dy = 0$. Es sei nun $\lambda = \lambda(x,y)$ ein Euler-Multiplikator (integrierender Faktor) der Gleichung 2. Dann gilt

3. $\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda g_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g_x)$ oder ausgerechnet

4. $\lambda_x g_x + \lambda_y g_y = -\lambda(g_{xx} + g_{yy})$. Ferner existiert dann eine Funktion $G(x,y)$ mit

5. $G_x = -\lambda g_y$, $G_y = \lambda g_x$. Die Projektionen der Höhenlinien von $w = G(x,y)$ sind also identisch mit den Projektionen der Fallinien von $w = g(x,y)$. Dann sind die Projektionen der Fallinien von $w = G(x,y)$ aber identisch mit den Projektionen der Höhenlinien von $w = g(x,y)$. Diese bilden nach Voraussetzung eine Geradenschar. Also ist $G(x,y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (14) aus §1.[1] Bei den Flächen $w = g(x,y)$ und $w = G(x,y)$, die in der hier geschilderten Weise"korrespondieren", werden sozusagen die "Rollen der Höhen- und Fallinienprojektionen vertauscht". Beginnen wir etwa mit einer Lösung von (2) der Form $w = g\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)$, d.h. wir beginnen mit einem geraden Konoid, so erhalten wir eine Lösung von (14) aus §1 der Form $w = G((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)$, d.h. wir erhalten eine Rotationsfläche. Die Gestalt der Rotationsfläche hängt dabei von g und dem gewählten Multiplikator λ ab. Diese Überlegungen werfen ein neues Licht auf die Ergebnisse aus Satz 11 und Satz 12 und gestatten außerdem eine interes-

---

[1] Man bestätigt diesen Sachverhalt auch leicht rein rechnerisch mit Hilfe von 4. und 5.

sante Folgerung aus diesen Sätzen.

Ist nämlich f(z) eine holomorphe Funktion und setzen wir $|f(z)| = R(x,y)$ und $\arg f(z) = \underline{\Phi}(x,y)$, dann gilt (siehe I,§3, (7))

$$\frac{1}{R} R_x = \underline{\Phi}_y, \quad -\frac{1}{R} R_y = \underline{\Phi}_x .$$

Daraus folgt aber unmittelbar: Genügt $w = R(x,y)$ der Differentialgleichung (14) aus §1, so genügt $w = \Phi(x,y)$ der Differentialgleichung (2). Löst $w = R(x,y)$ die Differentialgleichung (2), so ist $w = \underline{\Phi}(x,y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (14) aus §1.

Damit erhalten wir

Satz 13: Die einzigen harmonischen Funktionen, die der Differentialgleichung (14) aus §1 bzw. der Differentialgleichung (2) genügen, sind $\mathrm{Re}(g(z))$ bzw. $\mathrm{Im}(g(z))$ mit $g(z)=\frac{1}{c}\log(cz+z_0)+z_1$ oder $g(z) = z_0 z + z_1$. Dabei ist $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Die zugehörigen Realteil- bzw. Imaginärteilflächen sind, abgesehen vom trivialen Fall der Ebene, die Drehfläche der Logarithmuskurve bzw. die Wendelfläche.

Während wir durch die Formel (4) aus §1 Einblick in die Geometrie der Integralflächen von (2) gewonnen haben, hat Reimerdes die Differentialgleichung (2) integriert. Er gelangt dabei zu der impliziten Darstellung

$$y + x\varphi(w) = \psi(w)$$

der Integralflächen. Aus dieser Darstellung folgert er dann, daß die Integralflächen Regelflächen sind, deren Erzeugende parallel zur x,y-Ebene sind (Reimerdes [XIX], S. 11 f). Die enge Beziehung zur Differentialgleichung (14) aus §1 wird nicht erkannt.

Wir wollen auch (2) integrieren. Jedoch benutzen wir wieder die Legendresche Transformation, die uns dann eine Parameterdarstellung der nicht abwickelbaren konoidalen Regelflächen liefern wird.

Zunächst rechnet man leicht nach, daß sich (2) auch (für $w_y \neq 0$) in der Form

(5) $\quad w_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x}{w_y}\right) - w_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w_x}{w_y}\right) = 0$ schreiben läßt.

Bedenkt man, daß die asymptotischen Linien zu sich selbst konjugiert sind, so ist diese Umformung auch geometrisch verständlich; denn (5) besagt doch gerade, daß die Scharen $w(x,y) = \text{const}$ und $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ zusammenfallen.

Als nächstes wollen wir die gemeinsamen Lösungen von

1. $w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = 0$ und

2. $w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = 0$ bestimmen. Dabei setzen wir $w_x \neq 0$ und $w_y \neq 0$ voraus. Multiplizieren wir 1. mit w_{xx} und benutzen wir dann 2., so erhalten wir

3. $(w_y w_{xx} - w_x w_{xy})^2 = 0$ und damit

4. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{w_x}{w_y}) = 0$. Aus 4. und (5) ergibt sich

5. $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{w_x}{w_y}) = 0$, so daß wir sagen können: Die abwickelbaren Integralflächen von (2) sind charakterisiert durch

$$aw_x + bw_y = 0 \quad \text{mit } a^2 + b^2 > 0 .$$

Die Torsen unter den konoidalen Regelflächen sind folglich die allgemeinen Zylinderflächen.

Wir wenden nun die Legendresche Transformation auf (2) an. Mit (22) und (27) aus §1 geht (2) über in

6. $\eta^2 \omega_{\eta\eta} + 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} + \xi^2\omega_{\xi\xi} = 0$. Gehen wir durch

7. $\xi = \varrho\cos\psi$, $\eta = \varrho\sin\psi$ zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir aus 6.

8. $\omega_{\varrho\varrho} = 0$. Diese Differentialgleichung können wir sofort integrieren. Wir erhalten

9. $\omega = \omega(\varrho, \psi) = \varrho \cdot g(\psi) + h(\psi)$. Dabei müssen die "willkürlichen" Funktionen g und h zweimal stetig differenzierbar sein, und es muß

10. $\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left[\omega_{\varrho\varrho}\omega_{\psi\psi} - \omega_{\varrho\psi}^2 + \varrho\omega_\varrho\omega_{\varrho\varrho} + \frac{2}{\varrho}\omega_\psi\omega_{\varrho\psi} - \frac{1}{\varrho^2}\omega_\psi^2\right] \neq 0$ sein.

Aus 9. folgt leicht, daß 10. gleichbedeutend ist mit

11. $\frac{dh}{d\psi} \neq 0$.

Somit erhalten wir aus 9. die folgende Parameterdarstellung für die windschiefen konoidalen Regelflächen:

(6) $x = g\cos\psi - g'\sin\psi - \frac{1}{\varrho}h'\sin\psi$, $y = g\sin\psi + g'\cos\psi + \frac{1}{\varrho}h'\cos\psi$

$w = -h(\psi)$, $h' \neq 0$.

Aus (6) folgt

12. $x\cos\psi + y\sin\psi = g(\psi)$. Durch $g(\psi)$ ist also die Schar der Projektionen der Erzeugenden festgelegt. $h(\psi)$ dagegen bestimmt, auf welcher Höhe die Erzeugenden liegen. Genau für $g + g'' = 0$, also $g = c_1\cos\psi + c_2\sin\psi$, laufen die Projektionen alle durch den Punkt $(c_1, c_2, 0)$, und wir erhalten die geraden Konoide, deren Leitgerade senkrecht auf der x,y-

Ebene steht und diese im genannten Punkt durchstößt. Diese Gerade ist die Striktionslinie (der geometrische Ort der Fußpunkte der Gemeinlote "benachbarter" Erzeugenden) des geraden Konoids. Aus (6) folgt ganz allgemein, daß die Kurve

(7) $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_1(\psi) = (g\cos\psi - g'\sin\psi,\ g\sin\psi + g'\cos\psi,\ -h)$

die Striktionslinie der Regelfläche (6) ist. Die diesbezüglichen Rechnungen vereinfachen sich, wenn man die Darstellung (6) selbst zunächst durch die Parametertransformation $\hat{\varrho} = \frac{h'(\varphi)}{\varrho}$, $\hat{\psi} = \psi$ vereinfacht.

Hiermit wollen wir diese Untersuchungen beenden. Im nächsten Abschnitt bearbeiten wir die analoge Fragestellung bzgl. der Fallinien.

2.2 Das Zusammenfallen von Fallinien und Asymptotenlinien

Bevor wir die Differentialgleichung für die gesuchten Flächen ableiten, ist es vorteilhaft, auf eine Klasse von Raumkurven, die in 1.1 bereits erwähnt wurde, nochmal kurz einzugehen.

Kurven, deren Tangenten mit einer festen Richtung $\mathfrak{n}$ einen festen Winkel τ bilden, heißen Böschungslinien (auch allgemeine Schraubenlinien). Nach einem Satz von Lancret sind diese Kurven auch dadurch charakterisiert, daß $\frac{\tau(s)}{\varkappa(s)} = \text{const}$ gilt. Einen weiteren Zugang zu dieser Kurvenklasse erhält man, wenn man nach den geodätischen Linien der allgemeinen Zylinderflächen fragt. Die bekanntesten Beispiele sind wohl die gewöhnliche Schraubenlinie und die konische Schraubenlinie. Die eine liegt auf einem Drehzylinder, die andere auf einem Zylinder der logarithmischen Spirale, wobei die Erzeugenden jeweils parallel zu $\mathfrak{n}$ sind. Die konische Schraubenlinie kann auch aufgefaßt werden als Loxodrome des geraden Kreiskegels, dessen Achse parallel zu $\mathfrak{n}$ ist.

Aus der Differentialgleichung der Fallinien (§1, (2)) und der Differentialgleichung (1) der Asymptotenlinien erhält man leicht

(8) $w_x w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = 0$ für die gesuchten Flächen (Reimerdes [X], S. 11).

Wir können (8) auch in der Form

(9) $w_x \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2 + w_y^2) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(w_x^2 + w_y^2) = 0$ schreiben.

Diese Umformung ist auch geometrisch verständlich; denn (9) besagt gerade, daß sich die Scharen $w(x,y) = \text{const}$ und $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ senkrecht schneiden, also die Schar $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ zusammenfällt mit den Fallinienprojektionen.
Bedenken wir nun, was wir über die zu den Fallinien konjugierten Kurven in 1.1 ausgesagt haben, so können wir unmittelbar folgern:
Bei den Integralflächen von (8) besteht das eine System der asymptotischen Linien (die Fallinien) aus Böschungslinien mit gemeinsamer fester Richtung $n = n_3$.
Hat man umgekehrt eine Fläche, deren eine Schar von Asymptotenlinien aus Böschungslinien mit gemeinsamer fester Richtung n besteht, so muß sich die Fläche lokal durch eine Gleichung $w = w(x,y)$ beschreiben lassen, wobei $w(x,y)$ der Differentialgleichung (8) genügt, wenn man die w-Achse parallel zu n wählt. Dies folgt unter Berücksichtigung der Formel (12) aus §1, wenn man bedenkt, daß die Schmiegebenen der einen Schar von Asymptotenlinien jeweils konstante Neigung gegen die x,y-Ebene aufweisen und mit den Tangentialebenen identisch sind. Damit haben wir eine geometrische Charakterisierung der Integralflächen von (8) gewonnen.
Da wir, wie in den vorangegangenen Fällen, auch die Differentialgleichung (8) mit der Legendreschen Transformation bearbeiten wollen, bestimmen wir als nächstes die abwickelbaren Integralflächen von (8). Zunächst liest man aus (9) direkt ab, daß die Lösungen von

1. $w_x^2 + w_y^2 = a^2$ auch Lösungen von (8) sind.

Ferner folgt aus (8) direkt

2. $w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = 0$ und
3. $w_x^2 w_{xx} w_{yy} + 2w_x w_y w_{xy} w_{yy} + w_y^2 w_{yy}^2 = 0$. Benutzen wir jetzt außerdem
4. $w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = 0$, so erhalten wir
5. $(w_x w_{xx} + w_y w_{xy})^2 = 0$, $(w_x w_{xy} + w_y w_{yy})^2 = 0$.

Damit gilt aber

6. $\frac{\partial}{\partial x}(w_x^2 + w_y^2) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(w_x^2 + w_y^2) = 0$, so daß wir sagen können: Die Torsen unter den Integralflächen von (8) sind gerade die Böschungstorsen.

Wenden wir die Legendresche Transformation auf die Differentialgleichung (8) an (siehe §1,(22) - (27)), so erhalten wir

7. $\xi^2\omega_{\eta\eta} - 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} + \eta^2\omega_{\xi\xi} = 0$. Gehen wir auch hier wieder durch

8. $\xi = \varrho\cos\psi$, $\eta = \varrho\sin\psi$ zu Polarkoordinaten über, so kommen wir zu der Differentialgleichung

(1o) $\omega_{\psi\psi} + \varrho\omega_\varrho = 0$ [1)]

Bei unserer zweifachen Transformation kommen wir ganz allgemein zu der folgenden Parameterdarstellung der Flächen:

9. $x = \cos\psi\omega_\varrho - \frac{1}{\varrho}\sin\psi\omega_\psi$, $y = \sin\psi\omega_\varrho + \frac{1}{\varrho}\cos\psi\omega_\psi$,
$w = \varrho\omega_\varrho - \omega$.

In unserem speziellen Fall gewinnen wir mit Hilfe von (1o) aus 9. die Parameterdarstellung

(11) $x = -\frac{1}{\varrho}(\cos\psi\omega_{\psi\psi} + \sin\psi\omega_\psi)$, $y = -\frac{1}{\varrho}(\sin\psi\omega_{\psi\psi} - \cos\psi\omega_\psi)$,
$w = -(\omega + \omega_{\psi\psi})$.

Aus (11) leitet man erneut leicht ab, daß die Parameterlinien $\varrho = \text{const}$ Böschungslinien sind; denn man erhält

(12) $x_\psi = -\frac{1}{\varrho}\cos\psi(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})$, $y_\psi = -\frac{1}{\varrho}\sin\psi(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})$,
$w_\psi = -(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})$,

(13) $x_\psi^2 + y_\psi^2 + w_\psi^2 = \frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})^2$ und damit für den Winkel ϑ zwischen der Tangente der Parameterlinie $\varrho = \varrho_o$ und der Richtung n_3

(14) $\cos\vartheta = \frac{\pm\varrho_o}{\sqrt{1+\varrho_o^2}}$.

Ferner folgt aus (13), unter Berücksichtigung von $\frac{\partial w}{\partial\psi} = -(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})$, daß der Bogen s auf der Fallinie $\varrho = \varrho_o$ zwischen zwei beliebigen Punkten P_o und P_1 proportional zur Höhendifferenz $w_1 - w_o$ dieser Punkte ist. Dies überlegt man sich leicht auch ohne Rechnung; denn wickeln wir den Zylinder, auf dem die Böschungslinie $\varrho = \varrho_o$ geodätisch ist, ab, so geht sie in eine Gerade über, und wir haben die Situation, wie sie die folgende Abbildung zeigt:

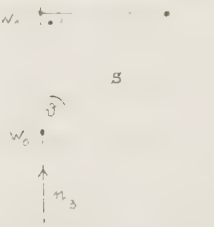


Abb. 16

---

1) Durch die Transformation $\varrho = e^{\hat{\varrho}}$ läßt sich (1o) weiter vereinfachen zu $\omega_{\psi\psi} + \omega_{\hat{\varrho}} = 0$. Dies ist bekanntlich die zur "Wärmeleitungsgleichung" adjungierte Differentialgleichung.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Darstellung (11) zwei interessante spezielle Fragen bearbeiten. Wir fragen nach den Flächen, bei denen die ausgezeichnete Schar der Asymptotenlinien durchweg aus gewöhnlichen Schraubenlinien bzw. konischen Schraubenlinien besteht. Dazu sind einige Vorbereitungen notwendig.

Mit Hilfe von (1o) erhält man

1. $\omega_{\varrho\varrho}\omega_{\psi\psi} - \omega_{\varrho\psi}^2 + \varrho\omega_\varrho\omega_{\varrho\varrho} + \frac{2}{\varrho}\omega_\varrho\omega_\psi - \frac{1}{\varrho^2}\omega_\psi^2 = -(\omega_{\varrho\psi} - \frac{1}{\varrho}\omega_\psi)^2$ und

damit

2. $\omega_{\varrho\varrho}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\varrho\eta}^2 = -\frac{1}{\varrho^2}(\omega_{\varrho\psi} - \frac{1}{\varrho}\omega_\psi)^2 = -\frac{1}{\varrho^4}(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})^2$.

Die Gaußsche Krümmung K ist mithin gegeben durch

(15) $K = \frac{w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}{(1+w_x^2+w_y^2)^2} = \frac{1}{(1+\varrho^2)^2}(\omega_{\varrho\varrho}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\varrho\eta}^2) = \frac{-\varrho^4}{(1+\varrho^2)^2(\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi})^2}$.

Nach 2. haben wir die gemeinsamen Lösungen von (1o) und

3. $\varrho\omega_{\varrho\psi} - \omega_\psi = 0$ auszuschließen. Diese Differentialgleichung haben wir bereits im Abschnitt 1.2 integriert. Die gemeinsamen Lösungen sind gerade gegeben durch

(16) $\omega_1 = \omega_1(\varrho, \psi) = \gamma_1\varrho\cos\psi + \gamma_2\varrho\sin\psi + \gamma_0$.

Ist durch $\omega(\varrho, \psi)$ gemäß

4. $\varphi = (\cos\psi\omega_\varrho - \frac{1}{\varrho}\sin\psi\omega_\psi,\ \sin\psi\omega_\varrho + \frac{1}{\varrho}\cos\psi\omega_\psi, \varrho\omega_\varrho - \omega)$

eine Fläche F festgelegt, und betrachtet man die durch

5. $\tilde{\omega} = \omega(\varrho, \psi) + \omega_1(\varrho, \psi)$ gegebene Fläche $\tilde{F}$, so gilt für den Ortsvektor $\tilde{\varphi}$, wie man leicht nachrechnet,

6. $\tilde{\varphi} = \varphi + (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_0)$, d.h. $\tilde{F}$ geht aus F durch eine Parallelverschiebung hervor.

Betrachtet man die durch

$\tilde{\omega} = -\omega(\varrho, \psi)$ gegebene Fläche $\tilde{F}$, so gilt

7. $\tilde{\varphi} = -\varphi$, d.h. $\tilde{F}$ geht aus F durch eine Spiegelung am Ursprung hervor.

Betrachtet man die durch

8. $\tilde{\omega} = \omega(\varrho, -\psi)$ gegebene Fläche $\tilde{F}$, so rechnet man leicht nach, daß $\tilde{F}$ das Spiegelbild von F bzgl. der x,w-Ebene ist. Die Spiegelung am Ursprung kann zusammengesetzt werden aus einer Drehung um die y-Achse um 18o° und einer Spiegelung an der x,w-Ebene. Geht man also von $\omega(\varrho, \psi)$ über zu

9. $\tilde{\omega} = -\omega(\varrho, -\psi)$, so folgt aus 7. und 8. und wegen des involutorischen Charakters der Spiegelung, daß $\tilde{F}$ kongruent zu F ist. $\tilde{F}$ erhalten wir nämlich, indem F um 18o° um die y-Achse gedreht wird.

Soll ferner eine Funktion $\omega^*(\varrho,\psi)$ der Gestalt

(17) $\omega^* = c_1(\varrho)\cos\psi + c_2(\varrho)\sin\psi + c_3(\varrho)$ eine Lösung von (1o) sein, so folgt sehr einfach, daß $c_1 = \gamma_1\varrho$, $c_2 = \gamma_2\varrho$, $c_3 = \gamma_0$ gilt.

Die hier durchgeführten Überlegungen gestatten es, wie wir sehen werden, Rechnungen zu vereinfachen bzw. Fallunterscheidungen zu umgehen.

Aus (11) erhält man für die Krümmung $\varkappa$ und die Torsion τ der Parameterlinien ϱ = const

(18) $\varkappa(\varrho,\psi) = \frac{\sqrt{\varphi_\psi^2\cdot\varphi_{\psi\psi}^2 - (\varphi_\psi\varphi_{\psi\psi})^2}}{(\varphi_\psi^2)^{3/2}} = \frac{\varrho}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{|\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}|}$ und

(19) $\tau(\varrho,\psi) = \frac{(\varphi_\psi\varphi_{\psi\psi}\varphi_{\psi\psi\psi})}{\varphi_\psi^2\cdot\varphi_{\psi\psi}^2-(\varphi_\psi\varphi_{\psi\psi})^2} = \frac{-\varrho^2}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1}{\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}}$. [1]

Für $\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}>0$ liegen mithin linksgewundene Böschungslinien vor, für $\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}<0$ rechtsgewundene. Nach unserer Bemerkung bei 7. bzw. 8. können wir uns, wenn es angebracht erscheint, zunächst etwa auf $\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}>0$ beschränken und haben im Anschluß daran noch die Spiegelbilder bzgl. des Ursprungs bzw. bzgl. der x,w-Ebene zu berücksichtigen.

Um nun die fraglichen Flächen zu bestimmen, gehen wir aus von den natürlichen Gleichungen der gewöhnlichen Schraubenlinien bzw. der konischen Schraubenlinien.

Die natürlichen Gleichungen der gewöhnlichen Schraubenlinie lauten bekanntlich

1o. $\varkappa(s)\equiv\varkappa_0$, $\tau(s)\equiv\tau_0$. Soll nun die Schar ϱ = const der durch (11) dargestellten Fläche durchweg aus gewöhnlichen Schraubenlinien bestehen, so folgt aus (18) direkt

11. $\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi} = a(\varrho)$, also

12. $\omega+\omega_{\psi\psi} = a(\varrho)\psi + b(\varrho)$. Andererseits folgt aus der Differentialgleichung (1o)

13. $\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}(\omega+\omega_{\psi\psi}) + \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega+\omega_{\psi\psi}) = 0$, so daß wir

14. $a'\psi + b' = 0$ erhalten und damit

15. $\omega+\omega_{\psi\psi} = \alpha\psi + \gamma_0$ gewinnen.

Die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

16. $Y'' + Y = \alpha X +$ bereitet keine Schwierigkeiten.

---

[1] (19) hätten wir, bis auf das Vorzeichen, auch aus (15) gewinnen können; denn nach einem Satz von Beltrami und Enneper gilt für die Windung τ der beiden krummen Asymptotenlinien $\tau^2 = -K$.

Die allgemeine Lösung ist durch

17. $Y = \alpha X + \gamma_0 + c_1 \cos X + c_2 \sin X$ gegeben.

Damit ist auch die Integration von 15. geleistet. Es ist also

18. $\omega(\varsigma, \psi) = \alpha\psi + \gamma_0 + c_1(\varsigma)\cos\psi + c_2(\varsigma)\sin\psi$.

Da 18. eine Lösung der Differentialgleichung (1o) sein soll, folgt unter Berücksichtigung von (17)

19. $\omega(\varsigma, \psi) = \alpha\psi + \gamma_1\varsigma\cos\psi + \gamma_2\varsigma\sin\psi + \gamma_0$. Bedenken wir ferner die im Zusammenhang mit (16) gemachten Ausführungen, so können wir uns auf

(2o) $\omega = \alpha\psi$ beschränken. Setzen wir (2o) in (11) ein, so erhalten wir die gesuchten Flächen in der Form

2o. $x = -\frac{\alpha}{\varsigma}\sin\psi$, $y = \frac{\alpha}{\varsigma}\cos\psi$, $w = -\alpha\psi$.

Aus 2o. folgt zunächst

21. $x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\varsigma^2}$, d.h. die gewöhnlichen Schraubenlinien ς = const liegen auf koaxialen Drehzylindern, wobei die Achse mit der w-Achse zusammenfällt.

Transformieren wir die Flächenparameter in naheliegender Weise, nämlich durch

22. $r = \frac{|\alpha|}{\varsigma}$, $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$ für $\alpha > 0$ bzw. $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ für $\alpha < 0$,

so geht 2o. über in die "Normalform" der Wendelfläche

(21) $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, p\varphi + c)$ mit $p \neq 0$.

Somit lautet die Antwort auf die erste Frage:

Die einzigen Flächen der durch die Differentialgleichung (8) definierten Klasse, deren ausgezeichnete Schar von Asymptotenlinien durchweg aus gewöhnlichen Schraubenlinien besteht, sind die Wendelflächen.

Die natürlichen Gleichungen der konischen Schraubenlinie gibt man sich meist in der Form

23. $\varkappa = \frac{a}{s}$, $\tau = \frac{b}{s}$ mit $a > 0$, $b \neq 0$, $0 < s < \infty$ vor (Strubecker[XXI], S. 194).

Dieser Form entspricht eine konische Schraubenlinie, bei welcher der Bogen s vom singulären Kurvenpunkt, der in die Kegelspitze fällt, aus gezählt wird. Die konische Schraubenlinie wird also bei wachsendem s im Sinne abnehmender Krümmung durchlaufen.

Beginnt man die Messung der Bogenlänge in einem regulären

Kurvenpunkt P_0, so erhält man

$$\varkappa = \frac{a}{s+k} \quad \text{mit } a>0,\ k>0,\ 0 \leq s < \infty \quad \text{bzw.}$$

24.

$$\varkappa = \frac{a}{k-s} \quad \text{mit } a>0,\ k>0,\ 0 \leq s<k\ ,$$

je nachdem, ob man von P_0 im Sinne abnehmender Krümmung ("weg vom singulären Punkt") bzw. im Sinne zunehmender Krümmung ("hin zum singulären Punkt") auf der Kurve voranschreitet.

Wir betrachten nun eine durch (11) gegebene Fläche, deren Linien ς = const durchweg konische Schraubenlinien sind. Ferner setzen wir $\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi} > 0$ voraus und zählen die Bogenlänge s auf den Linien ς = const von einer festen Parameterlinie $\psi = \psi_0$ aus im Sinne wachsender ψ - Werte. Dann erhalten wir aus (13)

25. $$s(\varsigma,\psi) = \frac{\sqrt{1+\varsigma^2}}{\varsigma}\left[\omega(\varsigma,\psi)+\omega_{\psi\psi}(\varsigma,\psi)-(\omega(\varsigma,\psi_0)+\omega_{\psi\psi}(\varsigma,\psi_0))\right]$$

Wegen $\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi} > 0$ ist nach (18)

26. $$\frac{\partial \varkappa}{\partial \psi} = \frac{-\varsigma}{(1+\varsigma^2)(\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi})^2}\frac{\partial}{\partial\psi}(\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}),$$ d.h. für

27. $$\frac{\partial}{\partial\psi}(\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}) > 0$$ nimmt die Krümmung der Linien ς = const mit wachsendem ψ ab, und für

28. $$\frac{\partial}{\partial\psi}(\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}) < 0$$ nimmt die Krümmung der Linien ς = const mit wachsendem ψ zu.

Wir können o.B.d.A. 27. voraussetzen, da dies stets durch den Übergang von $\omega(\varsigma,\psi)$ zu $-\omega(\varsigma,-\psi)$ bewerkstelligt werden kann und andererseits nach 9. diesem Übergang nur eine Drehung entspricht. Also haben wir gemäß 24.

29. $$\varkappa(\varsigma,\psi) = \frac{a(\varsigma)}{s(\varsigma,\psi)+k(\varsigma)}$$ mit $a(\varsigma)>0$ und $k(\varsigma)>0$ anzunehmen.

Aus (18), 25. und 29. folgt

30. $$\omega+\omega_{\psi\psi} - c(\varsigma) = a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}\,(\omega_\psi+\omega_{\psi\psi\psi}) \quad \text{mit}$$

$$c(\varsigma) = \omega(\varsigma,\psi_0) + \omega_{\psi\psi}(\varsigma,\psi_0) - \frac{\varsigma}{\sqrt{1+\varsigma^2}}k(\varsigma)\ .$$

Unter Beachtung von $a(\varsigma)>0$ und $\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi} > 0$ gewinnen wir aus 3o. für $\omega+\omega_{\psi\psi}$ die Darstellung

31. $$\omega+\omega_{\psi\psi} = d(\varsigma)\exp\left\{\frac{1}{a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}}\psi\right\} + c(\varsigma) \text{ mit } d(\varsigma)>0\ .$$

Da $\omega(\varsigma,\psi)$ eine Lösung von (1o) sein soll, muß für $\omega+\omega_{\psi\psi}$ wieder die Beziehung 13. $\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}(\omega+\omega_{\psi\psi})+\varsigma\frac{\partial}{\partial\varsigma}(\omega+\omega_{\psi\psi}) = 0$ gelten. Das führt mit 31. auf

32. $\left[\frac{d(\varsigma)}{a^2(\varsigma)(1+\varsigma^2)} + \varsigma d' + \varsigma d(\varsigma)\psi \frac{d}{d\varsigma}\left(\frac{1}{a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}}\right)\right] \exp\left\{\frac{1}{a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}}\right\}$

$+\varsigma c' = 0$.

Differenzieren wir 32. partiell nach ψ , so bekommen wir die beiden Gleichungen

33. $\frac{d}{d\varsigma}\left(\frac{1}{a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}}\right) = 0$, $\frac{d(\varsigma)}{a^2(\varsigma)(1+\varsigma^2)} + \varsigma \cdot d' = 0$.

Also gilt

34. $\frac{1}{a(\varsigma)\sqrt{1+\varsigma^2}} = \alpha > 0$, $\alpha^2 d(\varsigma) + \varsigma d' = 0$. Daraus folgt wegen $d(\varsigma) > 0$

35. $d = \varsigma^{-\alpha^2} \cdot e^{\beta}$ und unter nochmaliger Benutzung von 32.

36. $c' = 0$, also $c(\varsigma) \equiv \gamma_0$. Tragen wir dies alles in 31. ein, so gelangen wir für $\omega + \omega_{\psi\psi}$ zu der Darstellung

37. $\omega + \omega_{\psi\psi} = \varsigma^{-\alpha^2} \cdot \exp\{\alpha\psi + \beta\} + \gamma_0$.

Die gewöhnliche Differentialgleichung

38. $Y'' + Y = \varsigma^{-\alpha^2} \exp\{\alpha X + \beta\} + \gamma_0$ besitzt die partikuläre Lösung

39. $Y_1 = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha X + \beta\} + \gamma_0$ und somit die allgemeine Lösung

40. $Y = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha X + \beta\} + c_1 \cos X + c_2 \sin X + \gamma_0$.

Damit ist auch die Integration von 37. bewerkstelligt, und es ist

41. $\omega = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\} + c_1(\varsigma)\cos\psi + c_2(\varsigma)\sin\psi + \gamma_0$.

Da 41. eine Lösung der Differentialgleichung (1o) sein soll, folgt unter Berücksichtigung von (17)

42. $\omega = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\} + \gamma_1\varsigma\cos\psi + \gamma_2\varsigma\sin\psi + \gamma_0$.

Bedenken wir weiter die bei (16) durchgeführten Überlegungen, so können wir uns zunächst auf

43. $\omega = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}$ mit $\alpha > 0$ beschränken.

Berücksichtigen wir ferner, daß wir $\omega_\psi + \omega_{\psi\psi\psi} > 0$ vorausgesetzt hatten, so gelangen wir nach 8. zu

44. $\omega = \frac{\varsigma^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ein Blick auf (11) lehrt, daß 44. auf Flächen führt, die unterhalb der x,y-Ebene liegen. Für die sich anschließende Be-

trachtung ist es zweckmäßig, dies noch durch eine Drehung um die y-Achse um 180° zu verändern, so daß wir nach 9. schließlich mit

(22) $\omega = \frac{-\varrho^{-\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ weiterarbeiten.

Setzen wir (22) in (11) ein, so erhalten wir die gesuchten Flächen in der Form

$$x = \frac{\alpha \varrho^{-(1+\alpha^2)}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}(\alpha\cos\psi + \sin\psi),$$

45. $$y = \frac{\alpha \varrho^{-(1+\alpha^2)}}{1+\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}(\alpha\sin\psi - \cos\psi),$$

$$w = \varrho^{-\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $\alpha = \cot\psi_1$, so folgt aus 45.

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \varrho^{-(1+\alpha^2)} \cdot \exp\{\alpha\psi + \beta\} \cos(\psi - \psi_1),$$

46. $$y = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \varrho^{-(1+\alpha^2)} \cdot \exp\{\alpha\psi + \beta\} \sin(\psi - \psi_1),$$

$$w = \varrho^{-\alpha^2} \exp\{\alpha\psi + \beta\}.$$

Aus 46. erhalten wir

47. $$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \varrho^{-(1+\alpha^2)} \cdot \exp\{\alpha\psi + \beta\} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \varrho^{-1} w.$$

Die Parameterlinien $\varrho = \text{const}$ liegen demnach auf koaxialen geraden Kreiskegeln, deren Spitze jeweils im Ursprung liegt. Die gemeinsame Achse fällt mit der w-Achse zusammen, und die Kegel sind nach oben geöffnet mit dem Öffnungswinkel $\delta = \arctan \frac{|\alpha|}{\varrho\sqrt{1+\alpha^2}}$. Für $\alpha > 0$ sind die konischen Schraubenlinien rechtsgewunden, für $\alpha < 0$ linksgewunden. Die Projektionen dieser Schraubenlinien sind logarithmische Spiralen, deren Auge jeweils im Ursprung liegt. Die Spiralen sind kongruent. Sie alle schneiden die Ursprungsstrahlen unter dem Winkel $\psi_1 = \operatorname{arc\,cot}\alpha$.

Setzen wir $\varphi = \psi - \psi_1$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varphi = \psi - \psi_1 + \pi$ für $\alpha < 0$, so erhalten wir aus 46. und 47. für unsere Flächen schließlich die Darstellung

(23) $$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ c r^{1+\frac{\alpha^2}{\alpha^2}} \cdot \exp\{\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varphi\})$$

mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c > 0$.

Wie man sieht, sind die durch (23) gegebenen Flächen Betragflächen; denn für $f(z) = z_0 z^{\gamma+i\vartheta}$ ist $|f(z)| = z_0 r^{\gamma} \cdot e^{-\vartheta\varphi}$ mit $z = re^{i\varphi}$.

Somit lautet die Antwort auf die zweite Frage:
Die einzigen Flächen der durch die Differentialgleichung (8) definierten Klasse, deren ausgezeichnete Schar von Asymptotenlinien durchweg aus konischen Schraubenlinien besteht, sind die durch (23) gegebenen Potenzbetragflächen.
Wir haben die durch (21) bzw. (23) gegebenen Flächen mit Hilfe einer geometrischen Fragestellung aus der Mannigfaltigkeit der Integralflächen von (8) ausgesondert. Andererseits wissen wir, daß sich (21) bzw. (23) als Imaginärteilflächen bzw. Betragflächen auffassen lassen. Wir werden jetzt zeigen, daß sie sich auch unter diesem Aspekt aussondern lassen.
Ist f holomorph, und setzt man $w = \mathrm{Im}(f)$ bzw. $w = |f(z)|$, so erhält man

(24) $w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = -|f'|^4 \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'^2}\right)$ bzw.

(25) $w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = \frac{|f'|^4}{|f|} \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)$.

Somit können wir sagen:
Die Imaginärteilflächen, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind, sind charakterisiert durch

(26) $\frac{f''}{f'^2} = -c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Die Betragflächen, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind, sind charakterisiert durch

(27) $\frac{ff''}{f'^2} = ic$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Lösen wir die Differentialgleichungen, so erhalten wir die beiden folgenden Sätze.

Satz 14: Die einzigen Imaginärteilflächen, abgesehen vom trivialen Fall der Ebene, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind, sind die Imaginärteilflächen zu
$f(z) = \frac{1}{c}\log(cz+a)+b$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a,b \in \mathbb{C}$.

Satz 15: Die einzigen Betragflächen, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind, sind die Potenzbetragflächen zu
$f(z) = (az+b)^{\alpha+i\beta}$ mit $\alpha = \frac{1}{1+c^2}$, $\beta = \frac{c}{1+c^2}$, $c \in \mathbb{R}$ und $a,b \in \mathbb{C}$.

Wir wollen noch explizit die Punktmenge in der ζ-Ebene ($\zeta = \alpha + i\beta$) bestimmen, die zu den Exponenten der in Satz 15 genannten Funktionen gehört.

Aus $\alpha = \frac{1}{1+c^2}$ und $\beta = \frac{c}{1+c^2}$ folgt $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha$ und damit

(28) $(\alpha - \frac{1}{2}) + \beta^2 = \frac{1}{4}$

Die Exponenten liegen also alle auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$. Andererseits liefert auch jeder Punkt dieses Kreises mit Ausnahme des Ursprungs einen geeigneten Exponenten.

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir uns mit dem Satz von Catalan beschäftigen, den wir bereits bei unseren Betrachtungen über die Regelflächen unter den Betragflächen erwähnt haben. [1] Bei unseren Untersuchungen der Differentialgleichung (2) bzw. der Differentialgleichung (8) sind wir beide Male auf die Wendelflächen gestoßen (siehe Satz 13 bzw. Satz 14). Dieser Umstand legt die Frage nach allen gemeinsamen Integralflächen der Differentialgleichungen (2) und (8) nahe. Bei solch einer Integralfläche fällt also das Netz der Höhen- und Fallinien zusammen mit dem Netz der asymptotischen Linien. Nun ist aber bekanntlich die Orthogonalität der Asymptotenlinien charakteristisch für die Minimalflächen. Also sind die gemeinsamen Integralflächen von (2) und (8) stets Minimalflächen. Ist andererseits eine Integralfläche von (2) bzw. (8) zugleich Minimalfläche, so ist sie auch zugleich Integralfläche von (8) bzw. (2).

Die gemeinsamen Integralflächen von (2) und (8) lassen sich sehr leicht bestimmen; denn durch Addition von (2) und (8) erhält man $w_{xx} + w_{yy} = 0$ als notwendige Bedingung. Damit folgt aber aus unseren bisherigen Ergebnissen unmittelbar: Die gemeinsamen, nicht ebenen Integralflächen von (2) und (8) sind gerade die Wendelflächen.

Dieses Resultat werden wir nun benutzen, um auf sehr einfache Weise zu zeigen, daß die Wendelflächen die einzigen nicht ebenen Regelflächen unter den Minimalflächen sind.

Sei also die Regelfläche F mit der Darstellung

1. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{m}(u) + v\,\mathfrak{j}(u)$ zugleich eine Minimalfläche. Die mittlere Krümmung H ist gegeben durch

2. $H = \frac{1}{2g}(g_{11}\,b_{22} - 2g_{12}\,b_{12} + g_{22}\,b_{11})$. Die Linien u=const also die Erzeugenden der Regelfläche F, bilden die eine Schar der Asymptotenlinien, was auch dadurch zum Ausdruck kommt, daß $b_{22} = \mathfrak{x}_{vv} \cdot \mathfrak{n} = 0$ ist.

---

[1] Eine wissenschafts - historische Betrachtung zu diesem Satz findet man wieder in der bereits genannten Arbeit von Reich (Reich[XVIII], S. 316 f).

Somit reduziert sich die Bedingung H = 0 bei der Darstellung 1. auf die Gleichung

3. $g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = 0$. Berechnet man mit Hilfe von 1. die hier auftretenden Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform, so führt 3. zu einer algebraischen Gleichung zweiten Grades in v. Der Faktor bei v^2 lautet $\mathfrak{z}^2 \cdot (\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}'')$, folglich muß

4. $(\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}'') = 0$ gelten. Nun haben wir in 2.1 angemerkt (Formel (3)), daß 4. notwendig und hinreichend dafür ist, daß F eine konoidale Regelfläche ist. Wählen wir also das räumliche Koordinatensystem so, daß die Richtebene mit der x,y-Ebene zusammenfällt, so wissen wir bereits, daß sich F lokal durch eine Gleichung w = w(x,y) beschreiben läßt, wobei w(x,y) der Differentialgleichung (2) genügt. Dann muß aber, wie wir uns eingangs überlegt haben, w(x,y) auch der Differentialgleichung (8) genügen, und das hat zur Folge, daß F eine Wendelfläche ist.

Mit diesem Ergebnis beenden wir diesen Abschnitt. Wir haben die von Reimerdes aufgeworfenen Fragestellungen in den beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels für die Betragflächen vollständig beantworten können und haben uns darüber hinaus einen Einblick in die diesbezüglichen allgemeinen Verhältnisse verschafft, der es uns gestattete, die bei den Betragflächen anfallenden Ergebnisse besser zu verstehen. In den folgenden Paragraphen werden wir Fragestellungen behandeln, die sozusagen durch die bisherigen Erörterungen initiiert werden.

§3 Die Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden, und die Betragflächen mit ebenen Fallinien

3.1 Die Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden

Man kann sich die Frage stellen, ob man jedes Bogenelement

1. $ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,dudv + g_{22}\,dv^2$ durch Einführung neuer Parameter

2. $p = p(u,v)$, $q = q(u,v)$ auf die Form

3. $ds^2 = \lambda(p,q)\cdot(dp^2 + dq^2)$ bringen kann.

Parameter, die das leisten, heißen isotherme Parameter.

Die Existenz isothermer Parameter ist für zweimal stetig differenzierbare Flächen gesichert. Ihre Wichtigkeit beruht auf folgendem Zusammenhang: Sind p und q isotherme Parameter auf der Fläche F, hat also die erste Grundform die "isotherme Gestalt" 3., so erhält man eine winkeltreue (konforme) Abbildung von F in die Ebene, wenn man p und q als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deutet. Um jetzt alle winkeltreuen Abbildungen von F in die Ebene zu ermitteln, hat man nur noch die im Parametergebiet G der p,q- Ebene holomorphen Funktionen $f(\zeta)$ mit $\zeta = p + iq$ und $f'(\zeta) \neq 0$ heranzuziehen.

Ein Netz auf der Fläche F heißt <u>isothermes Netz</u>, wenn es eine konforme Abbildung von F in die Ebene gibt, bei der das Netz auf ein orthogonales Geradennetz abgebildet wird.

Die Parameterlinien der Fläche $F: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v)$ bilden genau dann ein isothermes Netz, wenn für die Koeffizienten der ersten Grundform

(1) $\dfrac{g_{11}(u,v)}{g_{22}(u,v)} = \dfrac{f_1(u)}{f_2(v)}$, $g_{12}(u,v) = 0$ gilt (V.u.K.Kommerell [XII], S.141).

Die Bedingung $g_{12} = 0$ besagt einfach, daß jedes isotherme Netz notwendig orthogonal ist. Die andere Bedingung bringt zum Ausdruck, daß man durch eine geeignete neue Bezifferung der Parameterskalen zu isothermen Parametern p und q gelangen kann; denn setzt man

4. $p = \int \sqrt{f_1(u)}\, du$, $q = \int \sqrt{f_2(v)}\, dv$, so folgt aus (1), daß p und q isotherme Parameter sind.

Mit Hilfe von (1) zeigt man leicht, daß auf einer Rotationsfläche die Breitenkreise und Meridiane ein isothermes Netz bilden. Nun fallen bei den in Satz 1 aufgeführten Rotationsflächen die Breitenkreise und Meridiane mit den Höhen- und Fallinien zusammen. Also existieren Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden. Ein weiteres Beispiel dafür liefern die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{az+b}$; denn auf ihnen sind die Höhen- und Fallinien zugleich geodätische Linien. Bilden wir die Zylinder längentreu in die Ebene ab, so gehen die genannten Linien in ein orthogonales Geradennetz über.

Um alle Betragflächen mit der genannten Eigenschaft zu ermitteln, wollen wir das Kriterium (1) heranziehen. Dazu ist es

vorteilhaft, die Größen

5. $R = |f(z)|$, $\Phi = \arg f(z)$ als Flächenparameter einzuführen.

Sei also $\omega = f(z)$ eine holomorphe Funktion und F die Betragfläche zu f(z). Wir betrachten einen Punkt z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Funktion $z = g(\omega)$, die in einem Kreis K_{ω_0} um $\omega_0 = f(z_0)$ holomorph ist und für die $\omega = f(g(\omega))$ für alle $\omega \in K_{\omega_0}$ gilt. Betrachten wir den Teil $\hat{F}$ der Betragfläche, der über der Umgebung $g[K_{\omega_0}]$ von z_0 liegt, dann haben wir für $\hat{F}$ die Darstellung

(2) $\hat{F} : \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(R,\Phi) = (x(R,\Phi), y(R,\Phi), R)$ mit
$x(R,\Phi) = \mathrm{Re}(g(\omega))$, $y(R,\Phi) = \mathrm{Im}(g(\omega))$ und $\omega = Re^{i\Phi}$.

Auf $\hat{F}$ sind dann die Parameterlinien gerade die Höhen- und Fallinien, und für die Koeffizienten der ersten Grundform erhält man

(3) $g_{11}(R,\Phi) = 1 + |g'|^2$, $g_{12}(R,\Phi) = 0$, $g_{22}(R,\Phi) = R^2 \cdot |g'|^2$.

Nach (1) und (3) bilden die Parameterlinien auf $\hat{F}$ genau dann ein isothermes Netz, wenn

6. $\frac{\partial^2}{\partial R \partial \Phi} \log \frac{1+|g'|^2}{R^2 \cdot |g'|^2} = 0$ gilt. Das ist gleichbedeutend mit

7. $|g'|^2 (1+|g'|^2) \frac{\partial^2}{\partial R \partial \Phi} |g'|^2 - (1+2|g'|^2) \frac{\partial}{\partial R} |g'|^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} |g'|^2 = 0$.

Ist $G(\omega)$ holomorph und $\omega = Re^{i\Phi}$, so gilt, wie man leicht verifiziert:

(4) $\frac{\partial}{\partial R}\mathrm{Re}(G) = \frac{1}{R}\mathrm{Re}(\omega G')$, $\frac{\partial}{\partial \Phi}\mathrm{Re}(G) = -\mathrm{Im}(\omega G')$,
$\frac{\partial}{\partial R}\mathrm{Im}(G) = \frac{1}{R}\mathrm{Im}(\omega G')$, $\frac{\partial}{\partial \Phi}\mathrm{Im}(G) = \mathrm{Re}(\omega g')$.

Mit Hilfe der Formeln (4) und nach naheliegenden Umformungen erhält man für die in 7. auftretenden partiellen Ableitungen

8. $\frac{\partial}{\partial R}|g'|^2 = \frac{2|g'|^2}{R}\mathrm{Re}\left(\frac{\omega g''}{g'}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \Phi}|g'|^2 = -2|g'|^2 \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{\omega g''}{g'}\right)$

und

9. $\frac{\partial^2}{\partial R \partial \Phi}|g'|^2 = -\frac{2|g'|^2}{R} \cdot \left[\mathrm{Im}\left(\frac{\omega g''}{g'}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{\omega^2 g'''}{g'}\right)\right]$.

Setzen wir 8. und 9. in 7. ein, so erhalten wir, gleichfalls nach leichten Umformungen,

(5) $\mathrm{Im}\left(\omega \frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]'\right) = |g'|^2 \mathrm{Im}\left(\omega^2 \frac{g''^2}{g'^2} - \omega \frac{g''}{g'} - \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]'\right)$.

(5) ist die sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung dafür, daß die Parameterlinien $R = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ auf $\hat{F}$ ein isothermes Netz bilden. Auf eine Beziehung von gleicher

Struktur sind wir bereits bei der Untersuchung über die Rotationsflächen gestoßen (I, §2, (4)). Wir haben dort ein Lemma formuliert und bewiesen, wodurch die Verhältnisse vollständig geklärt sind. Wenden wir dies Lemma auf die Beziehung (5) an, so gelangen wir zu den folgenden drei Fällen:

1o. $g'^2 \equiv \text{const}$, d.h. $g(\omega) = \omega_0\omega + \omega_1$;

11. (a) $\omega^2\frac{g''^2}{g'^2} - \omega\frac{g''}{g'} - \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]' = k$ und

(b) $\omega\frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]' = c$ mit $k,c\in\mathbb{R}$;

12. (a') $g'\left[\omega\frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]' + k - \omega^2\frac{g''^2}{g'^2}\right] = \omega_0$ und

(b') $\omega\frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]' = \overline{\omega_0}g' + c$ mit $k,c\in\mathbb{R}$ und $\omega_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

In den Fällen 11. bzw. 12. haben wir jeweils zu prüfen, ob die Differentialgleichungen (a) und (b) bzw. (a') und (b') gemeinsame Lösungen haben. Bei dieser Untersuchung können wir wegen 1o. stets $g'' \neq 0$ voraussetzen.

Es ist

13. $\left[\omega^2\frac{g''^2}{g'^2}\right]' = 2\frac{g''}{g'}\left(\omega\frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]'\right)$.

(b) eingesetzt in (a) führt auf

14. $\omega^2\frac{g''^2}{g'^2} = k + c$. Daraus folgt durch Differentiation unter Berücksichtigung von 13.

15. $\frac{g''}{g'}\left(\omega\frac{g''}{g'} + \omega^2\left[\frac{g''}{g'}\right]'\right) = 0$ und damit $c = 0$ und nach 14.

16. $\omega^2\frac{g''^2}{g'^2} = k$. Aus 16. erhält man ohne Schwierigkeiten

17. $g(\omega) = \omega_0\log\omega + \omega_1$, $g(\omega) = \omega_0\omega^\gamma + \omega_1$, $g(\omega) = \omega_0\omega^{1+i\delta} + \omega_1$ mit $\omega_0,\omega_1\in\mathbb{C}$, $\omega_0 \neq 0$, $\gamma,\delta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Im Fall 12. gehen wir ganz entsprechend vor. (b') eingesetzt in (a') liefert die Differentialgleichung

18. $g'\left[\overline{\omega_0}g' + c + k - \omega^2\frac{g''^2}{g'^2}\right] = \omega_0$. Daraus folgt durch Differentiation und erneuter Benutzung von (b')

19. $k - c - \omega^2\frac{g''^2}{g'^2} = 0$. Erneute Differentiation führt wieder unter Beachtung von (b') zu

20. $\overline{\omega_0}g' + c = 0$ und damit zu $g'' = 0$.

Zusammenfassend können wir sagen:

Die einzigen Funktionen $z = g(\omega)$, die der Bedingung (5) ge-

nügen, sind die in 17. genannten Funktionen. Der Übergang zu $\omega = f(z)$ liefert den

Satz 16: Die einzigen Betragflächen, auf denen die Höhen- und Fallinien ein isothermes Netz bilden, sind die Exponentialzylinder zu $f(z) = e^{az+b}$ und die Rotationsflächen zu $f(z)=(az+b)^{\alpha}$ und die Potenzbetragflächen zu $f(z) = (az+b)^{\alpha+i\beta}$, wobei der Exponent $\alpha + i\beta$ der Kreisgleichung (28) aus §2 genügt.

Bei den einen sind die Fallinien zugleich geodätische Linien, bei den anderen zugleich asymptotische Linien.

3.2 Die Betragflächen mit ebenen Fallinien

Von den in Satz 16 genannten Exponentialzylindern und Rotationsflächen wissen wir, daß sie die einzigen Betragflächen sind, bei denen die Projektionen der Fallinien eine Geradenschar bilden. Die Fallinien selbst sind somit ebene Kurven, wobei die zugehörigen Ebenen jeweils senkrecht auf der x,y-Ebene stehen. Es stellt sich daher die Frage, ob es weitere Betragflächen mit ebenen Fallinien gibt. Wir werden dieser Frage nachgehen und alle Betragflächen bestimmen, denen diese Eigenschaft zukommt. Dazu gehen wir von der Darstellung (2) der Betragfläche aus. Wir haben also

1. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(R,\Phi) = (x(R,\Phi),\ y(R,\Phi),\ R)$ mit
$x(R,\Phi) = Re(g(\omega))$, $y(R,\Phi) = Im(g(\omega))$ und $\omega = R\,e^{i\Phi}$.

Die zum Parameterwert Φ_0 gehörige Fallinie hat somit die Parameterdarstellung

2. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(R) = (x(R,\Phi_0),\ y(R,\Phi_0),\ R)$.

Ist allgemein eine (dreimal stetig differenzierbare) Raumkurve $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(t)$ vorgegeben, so liegt sie genau dann in einer Ebene, wenn für alle t

3. $(\dot{\mathfrak{f}}\ \ddot{\mathfrak{f}}\ \dddot{\mathfrak{f}}) = 0$ gilt (Strubecker [XXI], S.141).

Aus 1. folgt mit Hilfe der Regeln (4) sehr einfach

4. $x_R = \frac{1}{R}\,Re(\omega g')$, $x_{RR} = \frac{1}{R^2}Re(\omega^2 g'')$, $x_{RRR} = \frac{1}{R^3}Re(\omega^3 g''')$ und
$y_R = \frac{1}{R}\,Im(\omega g')$, $y_{RR} = \frac{1}{R^2}Im(\omega^2 g'')$, $y_{RRR} = \frac{1}{R^3}\,Im(\omega^3 g''')$.

Für das Spatprodukt $(\dot{\mathfrak{f}}\ \ddot{\mathfrak{f}}\ \dddot{\mathfrak{f}})$ gewinnen wir folglich die Darstellung

5. $(\dot{\mathfrak{f}}\ \ddot{\mathfrak{f}}\ \dddot{\mathfrak{f}}) = \frac{1}{R^3}\left[Re(\omega^2 g'')Im(\omega^3 g''') - Im(\omega^2 g'')\,Re(\omega^3 g''')\right]$
mit $\omega = R\,e^{i\Phi_0}$.

Aufgrund von 3. und 5. können wir sagen:
Die Fallinien sind genau dann ebene Kurven, wenn
(6) $\mathrm{Re}(\omega^2 g'')\,\mathrm{Im}(\omega^3 g''') - \mathrm{Im}(\omega^2 g'')\,\mathrm{Re}(\omega^3 g''') = 0$ gilt.
(6) ist erfüllt für $g''' = 0$, und das führt zu
6. $g(\omega) = \omega_2\omega^2 + \omega_1\omega + \omega_0$ mit $(\omega_1,\omega_2) \neq (0,0)$.
Für $g''' \neq 0$ können wir (6) in der Form
7. $\frac{g'''}{g''} = \frac{c}{\omega}$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ schreiben.
Die Integration von 7. bereitet keine Schwierigkeit. Sie führt uns direkt auf
Satz 17: Die Betragfläche zu $\omega = f(z)$ trägt genau dann ebene Fallinien, wenn die Umkehrfunktion gegeben ist durch
$z = \omega_2\omega^k + \omega_1\omega + \omega_0$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $(\omega_1,\omega_2) \neq (0,0)$ bzw.
$z = \omega_2 \log\omega + \omega_1\omega + \omega_0$ mit $\omega_2 \neq 0$ bzw.
$z = \omega_2\omega\log\omega + \omega_1\omega + \omega_0$ mit $\omega_2 \neq 0$.

§4 Die Betragflächen mit kreisförmigen Höhenlinien und kreisförmigen Fallinienprojektionen

4.1 Vorbetrachtungen

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels hatten wir die Differentialgleichung $\left[\frac{f}{f'}\right]' = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ (§1,(15)) als notwendige und hinreichende Bedingung dafür erkannt, daß die Fallinienprojektionen der Betragfläche zu f(z) eine Geradenschar bilden. Im zweiten Paragraphen hatten wir für die Betragflächen, bei denen die Höhenlinienprojektionen eine Geradenschar bilden, die Differentialgleichung $\left[\frac{f}{f'}\right]' = ic$ mit $c \in \mathbb{R}$ (§2,(4)) gewonnen. Diese Ergebnisse legen es nahe, nach all den Betragflächen zu fragen, bei denen die Höhen- oder Fallinienprojektionen jeweils konstante Krümmung aufweisen, also kreisförmig sind, wobei wir hier "kreisförmig" so gebrauchen, daß "geradlinig" subsumiert ist. Daß weitere Betragflächen mit dieser Eigenschaft existieren, folgt z.B. unmittelbar aus der Kreisverwandtschaft der linearen Transformationen $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.
Wir werden zeigen, daß sich auch diese Gesamtheit von Betragflächen durch eine gewöhnliche Differentialgleichung für f(z) charakterisieren läßt. Für die Ableitung dieser Differentialgleichung werden die in §1 hergeleiteten Formeln für $\varkappa_\perp(z)$ und $\varkappa_\parallel(z)$ das entscheidende Hilfsmittel sein. Bevor wir diese Differentialgleichung aufstellen, ist es vorteilhaft, einige Dinge über Kreisbüschel (vergleiche Kowalewski[XIV], S.267ff

und lineare Transformationen voranzustellen.
Durch $A(x,y) = 0$ und $B(x,y) = 0$ mit
$A(x,y) = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + a_6$ und
$B(x,y) = b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2 + 2b_4x + 2b_5y + b_6$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$
seien zwei verschiedene Kurven zweiter Ordnung vorgegeben. Die Gesamtheit der Kurven, deren Gleichung gegeben ist durch $\lambda \cdot A(x,y) + \mu \cdot B(x,y) = 0$ mit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ bezeichnet man als Büschel von Kurven zweiter Ordnung. Sind durch $A(x,y) = 0$ und $B(x,y) = 0$ speziell zwei Kreise vorgegeben, so sind alle Kurven des Büschels Kreise, und ihre Gesamtheit wird als Kreisbüschel bezeichnet.
Die orthogonalen Trajektorien eines Kreisbüschels bilden ebenfalls ein Kreisbüschel. Die Höhenlinienprojektionen bilden demnach genau dann ein Kreisbüschel, wenn die Fallinienprojektionen ein Kreisbüschel bilden. Zwei Kreisbüschel, die sich senkrecht durchsetzen, heißen konjugiert zueinander. Es sei angemerkt, daß man die Orthogonalität benutzen kann, um zu dem Begriff des Kreisbüschels zu gelangen. Das Kreisbüschel ist dann die Gesamtheit der Kreise, die zwei vorgegebene Kreise senkrecht schneiden. Wegen der Winkeltreue und Kreisverwandtschaft der linearen Transformationen folgt aus dieser Definition unmittelbar, daß unter linearen Transformationen Kreisbüschel auf Kreisbüschel abgebildet werden. Diese Invarianz der Kreisbüschel gegenüber linearen Transformationen kann man ausnutzen, um zu einer Klassifizierung zu gelangen (vergleiche Carathéodory [III], S.47 f). Dies führt auf die folgenden sechs Klassen: Parallelenschar, Geradenbüschel, Schar von konzentrischen Kreisen, elliptisches Kreisbüschel (Gesamtheit aller Kreise durch zwei feste Punkte P und Q), hyperbolisches Kreisbüschel (Gesamtheit aller Kreise mit der Eigenschaft, daß zwei feste Punkte P und Q spiegelbildlich in bezug auf jeden Kreis liegen), parabolisches Kreisbüschel (Gesamtheit aller Kreise, die sich in einem festen Punkt P berühren).
Die drei zuletzt genannten Büschel enthalten jeweils genau eine Gerade. Diese Gerade bildet den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kreise des zum gegebenen konjugierten Büschels. Die Gerade kann auch gedeutet werden als Potenzlinie des Ausgangsbüschels. Beim elliptischen Büschel ist es die Gerade durch P und Q, beim hyperbolischen Büschel ist es das

Mittellot der Strecke PQ, beim parabolischen Büschel ist es die gemeinsame Tangente im Punkt P.
Das konjugierte Büschel zu einem elliptischen Büschel ist hyperbolisch, das konjugierte Büschel zu einem parabolischen Büschel ist parabolisch.
Wir betrachten nun lineare Transformationen $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $a \neq 0 \neq c$. Wir fragen nach den Urbildern der Kreise $|\zeta| = \text{const}$ und nach den Urbildern der Ursprungsgeraden. Dazu betrachten wir die Punkte

$$z_1 = -\frac{b}{a}\,,\quad z_2 = -\frac{d}{c}\,,\quad z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\,,\quad z_4 = z_\infty$$

und die zugehörigen Bilder

$$\zeta_1 = 0,\quad \zeta_2 = \zeta_\infty,\quad \zeta_3 = -\frac{a}{c}\,,\quad \zeta_4 = \frac{a}{c}\,.$$

Der Ursprungsgeraden, auf der die Punkte ζ_1 und ζ_3 liegen, entspricht die Gerade durch z_1 und z_2. Dem Kreis $|\zeta| = \left|\frac{a}{c}\right|$, auf dem also die Punkte ζ_3 und ζ_4 liegen, entspricht das Mittellot der Strecke $z_1 z_2$. Den übrigen Ursprungsgeraden entsprechen die Kreise durch z_1 und z_2, d.h. das Urbild der Ursprungsgeraden ist das elliptische Büschel durch z_1 und z_2, und das Urbild der konzentrischen Kreise $|\zeta| = \text{const}$ besteht aus dem konjugierten hyperbolischen Büschel.
Jetzt wollen wir die Urbilder der Geradenscharen $\mathrm{Re}(\zeta)=\text{const}$ und $\mathrm{Im}(\zeta)=\text{const}$ aufsuchen. Dazu betrachten wir die Geraden $\mathrm{Re}(\zeta) = \mathrm{Re}(\frac{a}{c})$ und $\mathrm{Im}(\zeta) = \mathrm{Im}(\frac{a}{c})$. Diesen Geraden entsprechen zwei Geraden g_1, g_2 durch z_2, die sich dort rechtwinklig schneiden. Den übrigen Geraden dieser Scharen entsprechen Kreise durch z_2 mit der gemeinsamen Tangente g_1 bzw. g_2, d.h. die Urbilder der beiden Geradenscharen bilden ein Paar konjugierter, parabolischer Kreisbüschel.

4.2 Die Betragflächen mit kreisförmigen Höhenlinien und kreisförmigen Fallinienprojektionen

Für die Krümmung $\varkappa_H$ der Höhenlinienprojektionen und die Krümmung $\varkappa_F$ der Fallinienprojektionen haben wir die Formeln (§1, (8) und (9))

1. $\varkappa_H(z) = \left|\frac{f'}{f}\right| \mathrm{Re}\left(\frac{f}{f'}\right)'$ und

2. $\varkappa_F(z) = -\left|\frac{f'}{f}\right| \mathrm{Im}\left(\left|\frac{f}{f'}\right|'\right)$ gewonnen. Hieraus folgt

3. $\frac{\partial \varkappa_H}{\partial x} = \left|\frac{f'}{f}\right| \left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}\right) \mathrm{Re}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]'\right) + \mathrm{Re}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]''\right) \right\}$,

4. $\frac{\partial \varkappa_H}{\partial y} = -\left|\frac{f'}{f}\right| \left\{ \mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}\right) \mathrm{Re}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]'\right) + \mathrm{Im}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]''\right) \right\}$ und

5. $\frac{\partial \varkappa_F}{\partial x} = -\frac{f'}{f} \left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}\right) \mathrm{Im}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]'\right) + \mathrm{Im}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]''\right) \right\}$,

6. $\frac{\partial \varkappa_F}{\partial y} = \left|\frac{f'}{f}\right| \left\{ \mathrm{Im}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f}\right) \mathrm{Im}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]'\right) - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{f}{f'}\right]''\right) \right\}$.

Ist durch

7. $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Projektion einer Höhenlinie gegeben, so können wir annehmen (siehe §1, (1)), daß der Kurvenparameter t so gewählt ist, daß

8. $\frac{dx}{dt} = -w_y = \left|f\right| \mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right)$, $\frac{dy}{dt} = w_x = \left|f\right| \mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right)$ gilt.

Die Projektion weist genau dann konstante Krümmung auf, wenn

9. $\frac{\partial \varkappa_H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varkappa_H}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$ ist.

Weist nun jede Höhenlinienprojektion konstante Krümmung auf, so gelangen wir mit Hilfe von 3., 4., 8. und 9. und nach naheliegender Umformung zu

(1) $\mathrm{Im}\left(\frac{f}{f'}\left[\frac{f}{f'}\right]'' - \frac{1}{2}\left[\frac{f}{f'}\right]'^2\right) = 0$.

Führen wir die analogen Überlegungen mit den Projektionen der Fallinien durch, so gelangen wir gleichfalls zu (1). Somit können wir sagen, daß die Höhenlinien einer Betragfläche genau dann kreisförmig sind, wenn dies auch für die Projektionen der Fallinien gilt. Die Gesamtheit der Betragflächen, für die das zutrifft, ist nach (1) charakterisiert durch die Differentialgleichung

(2) $\frac{f}{f'}\left[\frac{f}{f'}\right]'' - \frac{1}{2}\left[\frac{f}{f'}\right]'^2 = k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Die Lösung von (2) gelingt am einfachsten, wenn wir (2) zunächst differenzieren. Differentiation von (2) führt unmittelbar auf

10. $\left[\frac{f}{f'}\right]''' = 0$. Hieraus erhalten wir direkt

11. $\left[\frac{f}{f'}\right]'' = z_0$, $\left[\frac{f}{f'}\right]' = z_0 z + z_1$, $\frac{f}{f'} = \frac{z_0}{2} z^2 + z_1 z + z_2$.

Die Beziehungen aus 11. eingesetzt in (2) liefern die Bedingung

12. $z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 = k$ für die Integrationskonstanten.

Das Aufsuchen der Lösungen bereitet jetzt keine Schwierigkeiten mehr. Nach passender Umbenennung der Integrationskon-

stanten finden wir

$$f(z) = e^{\frac{az+b}{cz+d}} \text{ für } k = 0,\ f(z) = \left[\frac{az+b}{cz+d}\right]^{\alpha} \text{ für } 0<k = -\frac{1}{2\alpha^2}$$

(3)

$$\text{und } f(z) = \left[\frac{az+b}{cz+d}\right]^{i\beta} \text{ für } 0>k = \frac{1}{2\beta^2}\ ,\ \text{wobei jeweils a,b,}$$

c,d aus $\mathbb{C}$ sind mit $ad - bc \neq 0$.

Aufgrund unserer Überlegungen aus 4.1 erkennen wir, daß bei den zu (3) gehörigen Betragflächen die Höhen- und Fallinienprojektionen stets konjugierte Kreisbüschel bilden und daß jeder Typ solcher Kreisbüschelpaare dabei auftritt. Wir fassen die Ergebnisse unserer Betrachtungen zusammen in

Satz 18: Die Höhenlinien einer Betragfläche sind genau dann kreisförmig, wenn die Fallinienprojektionen kreisförmig sind. Die Gesamtheit der Betragflächen mit dieser Eigenschaft ist durch (3) gegeben. Die Höhenlinien- und Fallinienprojektionen sind dabei stets konjugierte Kreisbüschel, und alle vier Typen dieser Kreisbüschelpaare treten dabei auf.

Es sei angemerkt, daß ein ganz entsprechender Satz für die Real- und Imaginärteilflächen gilt, dessen Beweis sich aus (2) oder auch (3) durch den Übergang zu $h(z) = \log f(z)$ ergibt.
Ferner sei darauf hingewiesen, daß die Differentialgleichung (2) ein geeignetes Hilfsmittel ist, um zu beweisen, daß die linearen Transformationen die einzigen winkeltreuen (mit Erhaltung der Winkelorientierung) und kreisverwandten Abbildungen der Ebene auf sich sind.
Damit beschließen wir diesen Paragraphen. Im nächsten und letzten Paragraphen dieser Arbeit befassen wir uns mit der allgemeinen Potenz.

§5 Geometrische Betrachtungen zur allgemeinen Potenz

5.1 Die Betragflächen, bei denen sich die Scharen arg f(z)=cons und $|f'(z)|$ = const unter festem Winkel schneiden

Wir sind bei verschiedenen Fragestellungen auf Betragflächen zur allgemeinen Potenz gestoßen. Dabei ergab sich aus der Fragestellung eine Bedingung an den Exponenten $\alpha + i\beta$. So lieferte $\beta = 0$ die Rotationsflächen unter den Betragflächen, $\alpha = 1$ die Kegelflächen unter den Betragflächen, und $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha$

lieferte schließlich alle Betragflächen, deren Fallinien zugleich asymptotische Linien sind. Im folgenden wird es darum gehen, Eigenschaften zu ermitteln, die möglichst allen Betragflächen zur allgemeinen Potenz und möglichst nur diesen zukommen.

Wir hatten die Differentialgleichung

1. $w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2) = 0$ erhalten (§1,(14)), als wir nach den Flächen fragten, bei denen das Netz aus Fall- und Höhenlinien zusammenfällt mit dem Netz der Krümmungslinien.

Die Differentialgleichung

2. $w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = 0$ erhielten wir (§2, (8)), als wir nach den Flächen fragten, bei denen die Fallinien zugleich asymptotische Linien sind.

In beiden Fällen können wir die Sachlage auch etwas anders betrachten. So sind die Integralflächen von 1. auch dadurch charakterisiert, daß die Kurven $w_x^2 + w_y^2 = a$, also die Projektionen der zu den Fallinien konjugierten Schar, die orthogonalen Trajektorien der Fallinienprojektionen sind. Bei den Integralflächen von 2. fallen diese beiden Scharen zusammen. Somit können die Integralflächen von 1. und 2. als Grenzfälle der Flächen $w = w(x,y)$ gedeutet werden, bei denen die Kurven $w_x^2 + w_y^2 = a$ die isogonalen Trajektorien der Fallinienprojektionen sind. Für diese Flächen leiten wir jetzt die Differentialgleichung ab.

Ist die Tangentenrichtung an die Fallinienprojektion im Punkt (x,y) durch (dx,dy), die entsprechende Richtung an die Kurve $w_x^2 + w_y^2 = a$ durch $(\delta x, \delta y)$ gegeben, gilt schließlich für den Schnittwinkel ϑ $\tan\vartheta = m$, so ist

3. $dx\delta y - dy\delta x + m(dx\delta x + dy\delta y) = 0.$

Unter Beachtung von $dx = w_x$, $dy = w_y$ und $\delta x = -\frac{\partial}{\partial y}(w_x^2 + w_y^2)$, $\delta y = \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2 + w_y^2)$ folgt aus 3.

$$4.\quad w_x \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2+w_y^2) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(w_x^2+w_y^2) + m\left\{ w_y \frac{\partial}{\partial x}(w_x^2+w_y^2) - w_x \frac{\partial}{\partial y}(w_x^2+w_y^2)\right\} = 0 .$$

Rechnen wir in 4. die partiellen Ableitungen aus, so erhalten wir

$$(1)\quad w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} + m\left\{w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2)\right\} = 0.$$

Die Integralflächen von (1) mit $w_x^2 + w_y^2 \neq \text{const}$ sind also gerade die Flächen, bei denen die Linien $w = w_x + w_y = a$ die Fallinienprojektionen unter konstantem Winkel ϑ mit $\tan\vartheta = m$ schneiden.

Für spätere Zwecke ist es vorteilhaft, die Veränderlichen x und y zu transformieren.

Zunächst gehen wir durch

(2) $z = x + iy = re^{i\varphi}$, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

zu Polarkoordinaten über. Dann erhalten wir aus (1)

5. $$r^4 w_r^2 w_{rr} + 2r^2 w_r w_\varphi w_{r\varphi} + w_\varphi^2 w_{\varphi\varphi} - r w_r w_\varphi^2 + m\{r^3 w_r w_\varphi w_{rr} - r w_r w_\varphi w_{\varphi\varphi} + r w_\varphi^2 w_{r\varphi} - r^3 w_r^2 w_{r\varphi} - w_\varphi^3\} = 0 .$$

Nun setzen wir

(3) $u + iv = \omega = \log z = \log r + i\varphi$, also $u = \log r$ und $v = \varphi$.

Damit geht 5. über in

(4) $$w_u^2 w_{uu} + 2w_u w_v w_{uv} + w_v^2 w_{vv} + m\{w_u w_v (w_{uu} - w_{vv}) + w_{uv}(w_v^2 - w_u^2)\} = (w_u + mw_v)(w_u^2 + w_v^2) .$$

Als nächstes ermitteln wir die Lösungen von (1), die zugleich Betragsfunktionen sind.

Für $w = |f(z)|$ gilt (§1, (7))

6. $$w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2) = \frac{|f'|^4}{|f|} \operatorname{Im}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)$$

und (§2,(25))

7. $$w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} = \frac{|f'|^4}{|f|} \operatorname{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right) .$$

Aus (1), 6. und 7. erhalten wir

8. $\operatorname{Im}\left((m+i)\frac{ff''}{f'^2}\right) = 0$. Somit können wir sagen, daß die Betragflächen, bei denen sich die Scharen $\arg f(z) = \text{const}$ und $|f'(z)| = \text{const}$ unter festem Winkel ϑ mit $\tan\vartheta = m$ schneiden, charakterisiert sind durch

(5) $$\frac{f'^2}{ff''} = \frac{m + i}{k} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} .$$

Die Differentialgleichung

9. $$\frac{f'^2}{ff''} = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \text{ hat die Lösungen}$$

1o. $$f(z) = (az + b)^{\frac{c}{c-1}} \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 .$$

Setzen wir $\alpha + i\beta = \frac{c}{c-1}$ und $c = \frac{m+i}{k}$, so erhalten wir

(6) $$f(z) = (az + b)^{\alpha + i\beta} \quad \text{mit } \alpha = \frac{m(m-k)+1}{(m-k)^2+1},$$
$$\beta = \frac{-k}{(m-k)^2+1} \quad \text{und } k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} .$$

Durch die Beziehungen für den Exponenten ist eine einparametrige Kurvenschar in der α,β - Ebene gegeben. Über diese Schar wollen wir uns einen Überblick verschaffen. Dazu eliminieren wir den Kurvenparameter k. Es ist

11. $\alpha^2+\beta^2=\frac{m^2+1}{(m-k)^2+1}$ und $\alpha-m\beta=\frac{m^2+1}{(m-k)^2+1}$. Somit erhalten wir die Schar in der Form

(7) $\alpha^2+\beta^2=\alpha-m\beta$. Aus (7) lesen wir unmittelbar ab, daß es sich um ein elliptisches Kreisbüschel mit den Knotenpunkten (0,0) und (1,0) handelt. Dies sind auch die einzigen Punkte, die durch die Parameterdarstellung (6) nicht erfaßt werden. Die zum Büschel gehörige Gerade durch die Knotenpunkte hat die Gleichung $\beta=0$, und wir erhalten sie aus (7) durch den Grenzübergang $m\longrightarrow\infty$. Auch dieser Grenzfall ordnet sich in unsere Betrachtungen ein. Unter Beachtung von Satz 11 fassen wir unsere Ergebnisse zusammen in

Satz 19: Die einzigen Betragflächen, bei denen die Kurvenscharen $\arg f(z)=\text{const}$ und $|f'(z)|=\text{const}$ sich unter festem Winkel δ schneiden bzw. zusammenfallen, sind die Betragflächen zur allgemeinen Potenz mit $f''\neq 0$ und die zur Exponentialfunktion $f(z)=e^{az+b}$.

Genauer gilt: Ist $\delta=\frac{\pi}{2}$, so handelt es sich um die Betragflächen zu $f(z)=(az+b)^{\alpha}$ mit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $f(z)=e^{iz+b}$. Für $\delta\neq\frac{\pi}{2}$ sind es die Betragflächen zu $f(z)=(az+b)^{\alpha+i\beta}$, wobei (α,β) der Kreisgleichung (7) mit $m=\tan\delta$ genügt.

Für m=0 ist die Differentialgleichung (1) identisch mit der Differentialgleichung (8) aus §2. In diesem Fall ist es uns gelungen (siehe Abschnitt 2.2), die Betragflächen unter den Integralflächen geometrisch zu charakterisieren. Wir wollen eine derartige Charakterisierung auch für m≠0 herleiten. Dazu genügt es offenbar nach (6), die Betragsfunktionen zu $f(z)=z_0z^{\alpha+i\beta}$ mit $\alpha^2+\beta^2=\alpha-m\beta$ zu betrachten. Unter Beachtung der Transformation (2) erhalten wir die Betragsfunktionen in der Form

1. $w=w(r,\varphi)=ar^{\alpha}e^{-\beta\varphi}$, $a=|z_0|$, $\alpha^2+\beta^2=\alpha-m\beta$.

Aus 1. folgt mit der Transformation (3), wenn wir noch statt $-\beta$ einfach β schreiben,

(8) $w=w(u,v)=ae^{\alpha u+\beta v}$ mit $\alpha^2+\beta^2=\alpha+m\beta$. Die zugehörigen Flächen haben wegen (2) und (3) die Parameterdarstellung

(9) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = (e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ w(u,v))$.

Die durch (8) und (9) gegebenen Integralflächen von (1) werden wir aus der Mannigfaltigkeit der Integralflächen durch eine Besonderheit der Fallinien aussondern, so wie wir es auch für m=0 getan haben. Dazu betrachten wir eine einparametrige Kegelschar von Kegeln der logarithmischen Spirale der Art

2. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(r,\varphi;b) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ br e^{m\varphi})$, wobei $b \neq 0$ der Scharparameter ist und m eine beliebige, aber feste reelle Zahl ungleich Null ist. Die Schar ist so beschaffen, daß alle Kegelspitzen im Ursprung liegen und als Leitkurven logarithmische Spiralen gewählt werden können, die in einer Ebene parallel zur x,y-Ebene liegen und den Durchstoßpunkt der w-Achse mit der genannten Ebene als gemeinsames Auge haben. Die Spiralen sind untereinander kongruent, aber gegeneinander gedreht. Mit der Transformation (3) geht 2. über in

(1o) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v;b) = (e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ be^{u+mv})$.

Schneiden wir eine Fläche (9) mit der Schar (1o), so sind die Schnittlinien gegeben durch

3. $w(u,v) = be^{u+mv}$. Wir eliminieren den Scharparameter b durch Differentiation nach dem Kurvenparameter τ und erhalten so

4. $w_u \frac{du}{d\tau} + w_v \frac{dv}{d\tau} = w\left(\frac{du}{d\tau} + m\frac{dv}{d\tau}\right)$. Jetzt fragen wir, wann die Fallinien der Fläche (9) mit diesen Schnittlinien zusammenfallen.

Auf den Fallinien können wir den Kurvenparameter t so wählen, daß

5. $\frac{dx}{dt} = w_x$, $\frac{dy}{dt} = w_y$ gilt. Hieraus folgt beim Übergang zu Polarkoordinaten

6. $\frac{dr}{dt} = w_r$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2} w_\varphi$, und daraus erhalten wir mit (3)

7. $\frac{du}{dt} = e^{-2u} w_u$, $\frac{dv}{dt} = e^{-2u} w_v$. Aus 4. und 7. erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung, nämlich

(11) $w_u^2 + w_v^2 = w(w_u + mw_v)$.

Man prüft leicht nach, daß die unter (8) aufgeführten Funktionen der Differentialgleichung (11) genügen. Entscheidend ist aber, daß diese Funktionen die einzigen sind, die gleich-

zeitig den Differentialgleichungen (4) und (11) genügen. Dies gilt es jetzt nachzuweisen.

Zum Beweis differenzieren wir (11) sowohl partiell nach u als auch nach v. Das liefert uns

1. $2w_u w_{uu} + 2w_v w_{uv} = w_u'' + ww_{uu} + mw_u w_v + mww_{uv}$ und

2. $2w_u w_{uv} + 2w_v w_{vv} = w_v w_u + ww_{uv} + mw_v^2 + mww_{vv}$.

Wir multiplizieren 1. mit w_u und 2. mit w_v und addieren anschließend die Gleichungen. So erhalten wir

3. $2w_u^2 w_{uu} + 4w_u w_v w_{uv} + 2w_v^2 w_{vv} = (w_u + mw_v)(w_u^2 + w_v^2)$
$+ w(w_u w_{uu} + w_v w_{uv}) + mw(w_u w_{uv} + w_v w_{vv})$.

Jetzt multiplizieren wir 1. mit w_v und 2. mit w_u und subtrahieren anschließend die Gleichungen. Das führt auf

4. $2\left[w_u w_v(w_{uu} - w_{vv}) + w_{uv}(w_v^2 - w_u^2)\right] = w(w_v w_{uu} - w_u w_{uv})$
$+ mw(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})$.

Die linke Seite von 4. schreiben wir etwas um und erhalten

5. $2\left[w_u(w_v w_{uu} - w_u w_{uv}) + w_v(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})\right] =$
$w(w_v w_{uu} - w_u w_{uv}) + mw(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})$.

Wir multiplizieren 4. mit m und addieren dazu 3. Das ergibt die Gleichung

6. $2\left[w_u^2 w_{uu} + 2w_u w_v w_{uv} + w_v^2 w_{vv} + m\left\{w_u w_v(w_{uu} - w_{vv}) + w_{uv}(w_v^2 - w_u^2)\right\}\right]$
$= (w_u + mw_v)(w_u^2 + w_v^2) + w(w_u w_{uu} + w_v w_{uv})$
$+ mw(w_v w_{vv} + w_v w_{uu}) + m^2 w(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})$.

Für die linke Seite von 6. können wir nach (4)
$2(w_u + mw_v)(w_u^2 + w_v^2)$ schreiben. Das führt auf

7. $(w_u + mw_v)(w_u^2 + w_v^2) = w(w_u w_{uu} + w_v w_{uv}) + mw(w_v w_{vv} + w_v w_{uu})$
$+ m^2 w(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})$.

Nach (11) ist $w_u^2 + w_v^2 = w(w_u + mw_v)$. Das führt mit 7. zu

8. $(w_u + mw_v)^2 = w_u w_{uu} + w_v w_{uv} + m(w_v w_{vv} + w_v w_{uu})$
$+ m^2(w_v w_{uv} - w_u w_{vv})$.

8. können wir auch in der folgenden Weise schreiben:

9. $w_u^2 + mw_u w_v - w_u w_{uu} - w_v w_{uv} + m(mw_v^2 + w_u w_v - w_v w_{vv}) =$
$m^2(w_v w_{uv} - w_u w_{vv}) + mw_v w_{uu}$.

Aus 1. bzw. 2. folgt einfach durch Umordnen

10. $w_u^2 + mw_u w_v - w_u w_{uu} - w_v w_{uv} = w_u w_{uu} + w_v w_{uv} - mww_{uv} - ww_{uu}$ bzw.

11. $mw_v^2 + w_u w_v - w_v w_{vv} = 2w_u w_{uv} + w_v w_{vv} - ww_{uv} - mww_{vv}$.

Aus 9., 10. und 11. ergibt sich

12. $w_{uu}(w_u - w) - mw_v w_{uu} + w_v w_{uv} \triangleq 2mw_{uv}(w_u - w) + m^2 w_{vv}(w_u - w)$
$+ mw_v w_{vv} - m^2 w_v w_{uv} = 0$.

Wir multiplizieren 12. mit w_u. Dann tritt dreimal der Term $w_u^2 - ww_u$ auf, den wir nach (11) ersetzen dürfen durch den Term $w_v(mw - w_v)$. Wird dies getan, so entsteht aus 12. eine Gleichung, bei der sich w_v als Faktor abspalten läßt. Unter der zusätzlichen Voraussetzung

13. $w_v \neq 0$ erhalten wir damit

14. $w_{uu}(mw - w_v) - mw_uw_{uu} + w_uw_{uv} + 2mw_{uv}(mw - w_v) + m^2w_{vv}(mw - w_v) + mw_uw_{vv} - m^2w_uw_{uv} = 0$.

Wir multiplizieren jetzt 12. mit m und addieren die so entstandene Gleichung und die Gleichung 14. Das führt zu

15. $w_uw_{uv} - w_vw_{uu} + m(w_uw_{vv} - w_vw_{uv}) = 0$.

Mit 15. sind wir praktisch schon am Ziel; denn durch 15. vereinfacht sich zunächst 5. erheblich. Wir erhalten

16. $w_u(w_vw_{uu} - w_uw_{uv}) + w_v(w_vw_{uv} - w_uw_{vv}) = 0$.

Fassen wir 15. und 16. als lineares homogenes Gleichungssystem in den "Unbekannten" $(w_vw_{uu} - w_uw_{uv})$ und $(w_vw_{uv} - w_uw_{vv})$ auf, so erkennen wir, daß zwei Fälle zu betrachten sind, nämlich einerseits

17. $mw_u - w_v = 0$ und andererseits

18. $w_vw_{uu} - w_uw_{uv} = 0$ und $w_vw_{uv} - w_uw_{vv} = 0$.

Aus 17. und (11) folgt

19. $w_u = w$ und $mw = w_v$. Dies führt auf die Funktionen

20. $w = ae^{u+mv}$.

Die zugehörigen Flächen (9) sind Kegel der logarithmischen Spirale, d.h. sie fallen jeweils mit einer Fläche der Schar (1o) zusammen.

Wegen der zusätzlichen Voraussetzung 13. $w_v \neq 0$ können wir im zweiten Fall an Stelle von 18. auch

19. $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{w_u}{w_v}\right) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_u}{w_v}\right) = 0$ betrachten. Dies ist gleichbedeutend mit

20. $w_u = cw_v$. Unter Benutzung von (11) erhalten wir jetzt

21. $w_u = \alpha w$, $w_v = \beta w$ mit $\alpha = \frac{c(m+c)}{1+c^2}$, $\beta = \frac{m+c}{1+c^2}$ und somit

22. $w = ae^{\alpha u+\beta v}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha + m\beta$.

Wegen 13. müssen wir noch

23. $w_v \equiv 0$ betrachten. Das führt uns unter Berücksichtigung von (11) auf

24. $w = ae^u$. Die zugehörigen Flächen (9) sind gerade Kreiskegel.

Damit haben wir also gezeigt, daß die gemeinsamen Lösungen der Differentialgleichungen (4) und (11) gerade die durch (8) gegebenen Funktionen sind. Das geometrisch orientierte Resümee aus diesem Sachverhalt ziehen wir im nächsten Satz.

Satz 2o: Die Betragflächen unter den Integralflächen von (1) sind innerhalb dieser Mannigfaltigkeit dadurch ausgezeichnet, daß ihre Fallinien auf einer Kegelschar der Art (1o) [1] liegen oder daß die Fläche mit einem Kegel aus dieser Schar identisch ist.

Es sei zum Schluß noch angemerkt, daß die mehrfach genannten Potenzbetragflächen nicht nur im Vergleich mit den übrigen Integralflächen von (1) die einzigen Flächen sind, deren Fallinien auf einer Kegelschar der Art (1o) liegen, sondern daß dies auch zutrifft, wenn man alle Betragflächen zum Vergleich heranzieht. Um dies zu zeigen, braucht man wegen des nach (3) bestehenden Zusammenhanges $z = e^{u+iv} = e^{\omega}$ nur die Betragsfunktionen $w = w(u,v) = |g(\omega)|$ zu bestimmen, die zugleich (11) lösen. Das geschieht mit dem schon häufig benutzten Verfahren (Gewinnung einer Differentialgleichung für $g(\omega)$ aus (11)) und bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

5.2 Die Betragflächen, bei denen sich die Scharen $|f(z)|=\text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ unter festem Winkel schneiden

Wir können uns bei den Vorbetrachtungen hier kurz fassen, da sie analog zu den Vorbetrachtungen im Abschnitt 5.1 sind. Haben wir dort die Differentialgleichungen (14) aus §1 und (8) aus §2 unter verändertem Blickwinkel betrachtet, so ist es hier einerseits wieder (14) aus §1, aber andererseits dazu die Differentialgleichung (2) aus §2. Das führt diesmal zu der Aufgabenstellung, die Differentialgleichung für die Flächen $w = w(x,y)$ herzuleiten, bei denen die Kurven $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ die isogonalen Trajektorien der Schar $w(x,y)=\text{const}$ sind. Setzen wir wieder für den Schnittwinkel σ $\tan\sigma = m$, so erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung wie in 5.1, nämlich

$$(12)\quad w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} + m\left\{ w_{xy}(w_x^2 - w_y^2) + w_x w_y (w_{yy} - w_{xx}) \right\} = 0 .$$

---

1) Dabei braucht selbstverständlich der Punkt der z-Ebene, mit dem alle Kegelspitzen zusammenfallen, nicht der Nullpunkt zu sein.

Die Integralflächen von (12) mit $\frac{w_x}{w_y} \neq \text{const}$ sind also gerade die Flächen, bei denen sich die Projektionen der Höhenlinien und die Projektionen der zu den Höhenlinien konjugierten Linien unter festem Winkel $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ schneiden.

Für $w = |f(z)|$ gilt (§1,(6))

1. $$w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = \frac{|f'|^4}{|f|} \cdot \left\{1 - \mathrm{Re}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)\right\},$$

und (§1, (7))

2. $$w_{xy}(w_x^2 - w_y^2) + w_x w_y (w_{yy} - w_{xx}) = -\frac{|f'|^4}{|f|} \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right).$$

Aus (12), 1. und 2. erhalten wir die Differentialgleichung

(13) $$\frac{f'^2}{ff''} = \frac{m+i}{k+i} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\setminus\{m\}\ ^{1)}.$$

(13) hat die Lösungen

(14) $$f(z) = (az + b)^{\alpha+i\beta} \quad \text{mit } \alpha = \frac{m}{m-k},\ \beta = \frac{1}{m-k} \text{ und } k \in \mathbb{R}\setminus\{m\}.$$

Eliminieren wir den Parameter k aus der Exponentenbedingung, so gelangen wir zu

(15) $\alpha = m\beta$, also den Ursprungsgeraden der α,β - Ebene mit Ausnahme der Geraden $\beta = 0$. Diese erhalten wir für $m = \infty$, und auch dieser Grenzfall ordnet sich in unsere Betrachtungen ein; denn für $f(z) = (az + b)^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ schneiden sich die hier betrachteten Scharen rechtwinklig. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 21: Die einzigen Betragflächen, bei denen die Kurvenscharen $|f(z)| = \text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ sich unter festem Winkel σ schneiden bzw. zusammenfallen, sind die Betragflächen zur allgemeinen Potenz.- Genauer gilt: Ist $\sigma = \frac{\pi}{2}$, so handelt es sich um die Betragflächen zu $f(z)=(az+b)^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ sind es die Betragflächen zu $f(z)=(az+b)^{\alpha+i\beta}$, wobei (α,β) der Geradengleichung (15) mit $m = \tan\sigma$ genügt.

Die zu $f(z) = (az + b)^{\alpha+i\beta}$ gehörige Kurvenschar $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ ist das Geradenbüschel durch den Punkt $z_0 = -\frac{b}{a}$. Daß es sich um eine Geradenschar handelt, liegt nicht daran, daß wir nach den Betragflächen unter den Integralflächen von (12) gefragt haben; denn bei jeder Integralfläche von (12) ist die Schar $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ eine Geradenschar. Wir hatten näm-

---

1) $k = m$ liefert die Lösung $f(z) = e^{az+b}$, die wegen $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ in diesem Zusammenhang nicht interessiert.

lich einerseits im Abschnitt 1.1 angemerkt, daß die Kurven der Schar $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ die Isoklinen der Höhenlinienprojektionen sind. Andererseits sind diese Kurven bei den Integralflächen von (12) zugleich die isogonalen Trajektorien der Höhenlinienprojektionen. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt aber, daß es sich um eine Geradenschar handeln muß.
Bei den Potenzbetragflächen können also die zu den Höhenlinien konjugierten Flächenkurven aufgefaßt werden als Schnittlinien der Fläche mit den Ebenen eines Büschels, dessen Trägergerade senkrecht auf der x,y - Ebene steht und diese im Punkt $(x_o, y_o, 0)$ durchstößt.
Nun gilt für beliebige Flächen die folgende Verallgemeinerung der Beziehung zwischen Breitenkreisen und Meridianen einer Rotationsfläche: Die Berührungslinien aller Kegel, die einer Fläche F umschrieben sind und deren Spitzen auf einer Geraden g liegen, bilden zusammen mit den Schnittlinien von F mit den Ebenen durch g ein Netz konjugierter Flächenkurven (Strubecker[XXIII], S.54 f).
Demnach bilden im allgemeinen die Tangentialebenen der Potenzbetragflächen längs einer Höhenlinie die Berührebenen eines Kegels. Die Kegel selber sind gerade Kreiskegel bzw. die uns bekannten Kegel der logarithmischen Spirale. Eine Ausnahme davon macht nur das gerade Konoid der Exponentialwendel. Hier sind die Höhenlinien identisch mit den Erzeugenden, und die Tangentialebenen längs einer Höhenlinie bilden ein Büschel. Das konjugierte Netz "entartet" in eine Schar asymptotischer Linien.
Ist die Fläche in der expliziten Form $w = w(x,y)$ gegeben und steht die Gerade g senkrecht auf der x,y - Ebene, so kann man leicht mit Hilfe der Gleichung der Tangentialebene
(16) $\zeta - w(x,y) = w_x(\xi - x) + w_y(\eta - y)$, wobei ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten der Ebene sind, die Projektionen der Berührungslinien ermitteln. Durchstößt g die x,y - Ebene im Punkt $(x_o, y_o, 0)$, so folgt aus (16)
(17) $w(x,y) + w_x(x_o - x) + w_y(y_o - y) = h$ (h:Scharparameter) für die Schar der Projektionen. Die Kegelspitze liegt im Punkt (x_o, y_o, h).
Gilt (17) für ein festes h_o identisch in einem Gebiet G der x,y - Ebene, so gehen alle Tangentialebenen, für welche die Projektion des Berührpunktes in G liegt, durch den festen

Punkt (x_o, y_o, h_o), und das zugehörige Flächenstück ist offenbar eine Kegelfläche, was wir im Abschnitt 2.1 des 1.Kapitels auch rechnerisch bestätigt haben.
Andernfalls erhalten wir aus (17) die Differentialgleichung

(18) $(w_{xx}\,dx + w_{xy}\,dy)(x - x_o) + (w_{xy}\,dx + w_{yy}\,dy)(y - y_o) = 0$

für die Projektionen der Berührungslinien.
Mit der Transformation

(19) $x - x_o = \varrho \cos\psi$, $y - y_o = \varrho \sin\psi$ geht (17) bzw. (18) über in

(2o) $w(\varrho, \psi) - \varrho w_\varrho = h$ bzw.

(21) $w_\psi d\psi - \varrho (w_{\varrho\varrho}\, d\varrho + w_{\varrho\psi}\, d\psi) = 0$.

Wir wissen, daß man bei den Potenzbetragflächen x_o und y_o so wählen kann, daß die Berührungslinien der Kegelschar identisch mit den Höhenlinien sind. Jedoch sind diese Betragflächen nicht die einzigen Integralflächen von (12), für die das zutrifft; denn aus (18) und der Differentialgleichung der Höhenlinien folgt, daß für derartige Flächen

(22) $\frac{w_x}{w_y} = F\left(\frac{y-y_o}{x-x_o}\right)$ gilt. Dieses Resultat kann aufgrund unserer geometrischen Diskussion auch ohne Rechnung gewonnen werden. Mit (22) sondert man jetzt leicht die Integralflächen von (12) aus, welche die genannte Eigenschaft haben. Es sind dies die Flächen zu

(23) $w(\varrho, \psi) = g\left(\varrho e^{-\frac{1}{m}\psi}\right)$.

Auch dieses Ergebnis kann man ohne Rechnung ableiten, wenn man gleich die isogonalen Trajektorien des Geradenbüschels benutzt.
Die Potenzbetragflächen kann man nun aus der durch (23) gegebenen Mannigfaltigkeit dadurch aussondern, daß man nach den Flächen fragt, bei denen die Höhe h der Kegelspitze proportional zu der Höhe ist, in der die als Berührungslinie zugehörige Höhenlinie verläuft. Ist c der Proportionalitätsfaktor, so führt (2o) und (23) auf die Potenzbetragflächen mit dem Exponenten

(24) $\alpha = 1 - c, \beta = \frac{1}{m}(1 - c)$.

Ullrich hat gezeigt, daß die allgemeinen Potenzen sich innerhalb einer sehr weiten Klasse holomorpher Funktionen durch eine Krümmungseigenschaft ihrer Betragflächen im Großen auszeichnen. Sie sind nämlich die einzigen Funktionen

dieser Klasse, deren Betragfläche im Gesamtverlauf einsinnige Gaußsche Krümmung K aufweist. Dabei gilt:

$K > 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$ und $K < 0 \Longleftrightarrow \alpha < 1$ (Ullrich[XXIV], S. 311).

Der Proportionalitätsfaktor c gibt also außerdem gerade die Abweichung des Realteils des Exponenten vom für die Krümmung K ausgezeichneten Wert 1 an. Die Zusammenhänge zwischen α, K, c und der Lage der berührenden Kegel sind folgendermaßen:

(a) $c > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 1 \Longleftrightarrow K < 0$; in diesem Fall liegen die Kegelspitzen oberhalb der x,y - Ebene, wobei sich für $0 < c < 1$ und damit auch $0 < \alpha < 1$ die Kegel nach oben öffnen, hingegen sind für $c > 1$ und damit $\alpha < 0$ die Kegel nach unten geöffnet.

(b) $c < 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1 \Longleftrightarrow K > 0$; hier liegen die Kegelspitzen unterhalb der x,y - Ebene, und die Kegel selbst sind durchweg nach oben geöffnet.

Wir sind zu der Diskussion des Proportionalitätsfaktors c gelangt, als wir uns bemühten, die Potenzbetragflächen unter den durch (23) gegebenen Flächen auszusondern. Am Ende dieses Abschnittes wollen wir die Potenzbetragflächen unter einem neuen Gesichtspunkt unter den Betragflächen aussondern. Alle durch (23) gegebenen Flächen tragen, wie wir wissen, ein konjugiertes Netz, dessen Projektionen aus einem Geradenbüschel und den isogonalen Trajektorien

1. $\varsigma = k e^{\frac{1}{m}\psi}$ bestehen.

Wir zeigen nun, daß von den Betragflächen nur gewisse Potenzbetragflächen ein derartiges konjugiertes Netz tragen.

Die zu der Schar 1. der logarithmischen Spiralen gehörige Differentialgleichung lautet

2. $\frac{d\varsigma}{d\psi} = \frac{1}{m}\varsigma$. Da die Schar 1. identisch sein muß mit der Schar (2o), folgt aus 2. und (21) die partielle Differentialgleichung

3. $w_\psi - \varsigma w_{\varsigma\psi} - \frac{1}{m}\varsigma^2 w_{\varsigma\varsigma} = 0$. Nach (19) gilt

4. $\zeta = \varsigma e^{i\psi} = z - z_o$. Wir transformieren weiter wie im Abschnitt 5.1, indem wir setzen

5. $u + iv = \omega = \log\zeta = \log\varsigma + i\psi = \log(z - z_o)$ und erhalten so aus 3.

6. $w_{vv} + \frac{1}{m} w_{uu} - w_v - \frac{1}{m} w_u = 0$. Um unser Problem zu lösen, haben wir jetzt die Lösungen von 6. zu bestimmen, für die $w = |g(\omega)|$ mit holomorphem $g(\omega)$ gilt. Das geschieht mit der

schon häufig benutzten Methode, indem wir nämlich mit $w_\omega = |g| \mathrm{Re}(\frac{g'}{g})$ etc. in die Differentialgleichung 6. gehen, und dies führt uns nach einfacher Rechnung auf die Beziehung

7. $\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\frac{g'^2}{g^2}) - \mathrm{Im}(\frac{g''}{g}) + \frac{1}{m}\mathrm{Im}^2(\frac{g'}{g}) + \frac{1}{m}\mathrm{Re}(\frac{g''}{g}) + \mathrm{Im}(\frac{g'}{g}) - \frac{1}{m}\mathrm{Re}(\frac{g'}{g}) = 0$.

Aus 7. folgt direkt, daß $h(u,v)=\mathrm{Im}^2(\frac{g'(\omega)}{g(\omega)})$ eine harmonische Funktion ist. Das hat zur Folge, wie wir im Teil C der Regelflächenuntersuchung gezeigt haben, daß die logarithmische Ableitung von g konstant ist; mithin gilt

8. $g(\omega) = \omega_1 e^{\omega_0 \omega}$. Unter Beachtung von 5. ist damit gezeigt, daß unsere Fragestellung notwendig auf Potenzbetragflächen führt. Damit es auch hinreicht, müssen wir für den Exponenten $\alpha + i\beta$ fordern, daß $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt. Somit gewinnen wir den

Satz 22: Trägt die Betragfläche ein konjugiertes Netz, dessen Projektion aus einem Geradenbüschel und seinem isogonalen Trajektorien besteht, so ist sie eine Potenzbetragfläche zu $f(z) = (az + b)^{\alpha+i\beta}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Im Grenzfall $m = \infty$ gehen die isogonalen Trajektorien des Geradenbüschels über in die orthogonalen Trajektorien. In diesem Fall sind die Potenzbetragflächen mit $\beta = 0$ nicht die einzigen Betragflächen, die ein derartiges konjugiertes Netz tragen. Ihre Gesamtheit erhält man entweder aus 7. mit $\frac{1}{m} = 0$ oder aus Satz 9 in Verbindung mit Satz 13. Jedoch nur bei den Potenzbetragflächen mit $\beta = 0$ ist dieses konjugierte Netz zugleich das Netz der Krümmungslinien. Dies entnehmen wir Satz 11, wenn wir zusätzlich berücksichtigen, daß allein die Höhen- und Fallinien ein orthogonales Netz bilden, das sich auch nach der Projektion noch rechtwinklig schneidet.
Im Grenzfall $m = 0$ ist nur noch das Geradenbüschel zu betrachten und anstelle des konjugierten Netzes eine asymptotische Schar. Hier sind wieder die Potenzbetragflächen mit $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = 0$ die einzigen Betragflächen, die eine asymptotische Schar tragen, deren Projektion ein Geradenbüschel ist. Dies kann leicht auf dem Wege gezeigt werden, den wir im Teil C der Regelflächenuntersuchung beschritten haben. Unter Berücksichtigung dieser Anmerkungen können wir demnach sagen, daß sich die Potenzbetragflächen innerhalb der

Betragflächen durch ein konjugiertes Netz charakterisieren lassen. Hiermit wollen wir den Abschnitt beenden. Im nächsten und letzten Abschnitt der Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Folgerung aus 5.1 und 5.2 .

5.3 Die Betragflächen, bei denen sich die Scharen $|f'(z)=\text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ unter festem Winkel schneiden

Im Abschnitt 5.1 haben wir festgestellt, daß sich bei der allgemeinen Potenz mit $f'' \neq 0$ die Scharen $\arg f(z) = \text{const}$ und $|f'(z)| = \text{const}$ unter festem Winkel schneiden. In 5.2 wurde gezeigt, daß bei der allgemeinen Potenz dies auch für die Scharen $|f(z)| = \text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ zutrifft. Nun schneiden sich die Scharen $|f(z)| = \text{const}$ und $\arg f(z) = \text{const}$ stets rechtwinklig. Aus all dem folgt unmittelbar, daß sich bei der allgemeinen Potenz mit $f'' \neq 0$ auch die Kurven $|f'(z)| = \text{const}$ und $\arg \frac{f'(z)}{f(z)} = \text{const}$ unter konstantem Winkel schneiden. Die Frage ist, ob dieser interessante Zusammenhang zwischen der Ableitung von f und der logarithmischen Ableitung von f auch charakteristisch für die allgemeine Potenz ist. Dieser Frage gehen wir jetzt nach.
Ist F(z) eine holomorphe Funktion, so gilt für den Winkel α, den die Kurve $|F(z)| = \text{const}$ im Punkt z mit der Richtung der x - Achse einschließt,

1. $$\tan\alpha = \frac{\mathrm{Re}(\frac{F'(z)}{F(z)})}{\mathrm{Im}(\frac{F'(z)}{F(z)})}$$, und für den entsprechenden Winkel

β der Kurve $\arg F(z) = \text{const}$ gilt

2. $$\tan\beta = -\frac{\mathrm{Im}(\frac{F'(z)}{F(z)})}{\mathrm{Re}(\frac{F'(z)}{F(z)})}$$. Setzen wir $F(z)=f'(z)$ bzw. $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, so erhalten wir nach 1. bzw. 2.

3. $$\tan\psi = \frac{\mathrm{Re}(\frac{f''}{f'})}{\mathrm{Im}(\frac{f''}{f'})}$$ bzw.

4. $$\tan\varphi = -\frac{\mathrm{Im}(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f})}{\mathrm{Re}(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f})}$$.

Für den Schnittwinkel δ gilt

5. $\tan\delta = \dfrac{\tan\psi - \tan\varphi}{1 + \tan\varphi\cdot\tan\psi}$. Aus 3., 4. und 5. folgt nach einigen Umformungen

6. $\tan\delta = -\dfrac{\mathrm{Re}(1 - \frac{f'^2}{ff''})}{\mathrm{Im}(1 - \frac{f'^2}{ff''})}$. Aus diesem bemerkenswert einfachen Zusammenhang zwischen δ und $\arg(1 - \frac{f'^2}{ff''})$ folgt mit $m = \tan\delta$ in der schon bekannten Weise

7. $f(z) = (az + b)^{\alpha + i\beta}$ mit $m\beta = \alpha - 1$.

Der Grenzfall $m = \infty$ führt auf die Gerade $\beta = 0$, und auch dieser Fall ordnet sich in unsere Betrachtungen ein.
Damit haben wir

Satz 23 : f sei eine holomorphe Funktion mit $f'' \neq 0$. $\hat{F}$ sei die Betragfläche zu f', $\check{F}$ sei die Betragfläche zu $\frac{f'}{f}$. Dann schneiden sich die Projektionen der Höhenlinien von $\hat{F}$ und die Projektionen der Fallinien von $\check{F}$ genau dann unter einem festen Winkel δ, wenn $f(z) = (az + b)^{\alpha + i\beta}$ ist. Die zu festem δ gehörigen Exponenten $\alpha + i\beta$ liegen dabei alle auf einer Geraden durch (1,0).

Wir hätten auch hier wieder so vorgehen können wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten, indem wir zunächst ganz allgemein die Differentialgleichung für die Flächen $w=w(x,y)$ abgeleitet hätten, bei denen sich die Scharen $w_x^2+w_y^2 = \text{const}$ und $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ unter festem Winkel schneiden. Dies hätte uns für $\delta \neq \frac{\pi}{2}$ auf die Differentialgleichung

(25) $(w_x^2 + w_y^2)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)$
$+m(w_{xx} + w_{yy})\{w_xw_y(w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2)\} = 0$

und für $\delta = \frac{\pi}{2}$ auf die Differentialgleichung

(26) $(w_{xx}w_{yy})\{w_xw_y(w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2)\} = 0$ geführt.

Bedenken wir unsere Untersuchungen im Abschnitt 1.2, so lesen wir aus (26) direkt ab, saß sich nur bei den speziellen Gesimsflächen aus 1.2 oder den Realteil- und Imaginärteilflächen die oben genannten Scharen rechtwinklig schneiden. Andererseits hätten wir in 5.1 und 5.2 auch den Weg einschlagen können, den wir hier beschritten haben. Für die dort in Frage stehenden Schnittwinkel δ_1 (Fallinienprojektionen und Projektionen der konjugierten Schar) bzw. δ_2 (Höhen-

linienprojektionen und Projektionen der konjugierten Schar) hätten sich

$$(27)\quad m_1(z) = \tan \delta_1(z) = -\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}\right)}{\mathrm{Im}\left(\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}\right)} \quad \text{bzw.}$$

$$(28)\quad m_2(z) = \tan \delta_2(z) = -\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)f''(z)}{f'^2(z)} - 1\right)}{\mathrm{Im}\left(\frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)} - 1\right)} \quad \text{ergeben.}$$

Das zentrale Hilfsmittel bei der schon mehrfach erwähnten Untersuchung von Ullrich über Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten ist die Differentialgleichung

$$(29)\quad -\frac{f'^2}{ff''} = c(z) \,.$$ Wir erkennen nun, daß bei den Lösungen von (29) die Winkel $\delta_1(z)$ bzw. $\delta_2(z)$ jeweils übereinstimmen. Wir haben in 5.1 und 5.2 den anderen Weg gewählt, da uns die Stellung der Betragflächen innerhalb der Integralflächen von (1) bzw. (12) bemerkenswert erschien. Wir greifen diese Differentialgleichungen zum Abschluß noch einmal auf und werden mit ihrer Hilfe eine Sonderstellung der Betragflächen zur allgemeinen Potenz schlechthin, also nicht nur im Vergleich zu den übrigen Betragflächen, herausarbeiten.

Wir wissen bereits, daß die Betragfläche zu $f(z)=(az+b)^{\alpha+i\beta}$ sowohl Integralfläche von

$$1.\quad w_x^2 w_{xx} + 2w_x w_y w_{xy} + w_y^2 w_{yy} + m_1\left\{w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2)\right\} = 0$$

als auch Integralfläche von

$$2.\quad w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} - m_2\left\{w_x w_y (w_{xx} - w_{yy}) + w_{xy}(w_y^2 - w_x^2)\right\} = 0$$

ist. Der Zusammenhang zwischen α, β, m_1 und m_2 ist dabei nach (7) und (15) durch

$$3.\quad \alpha^2 + \beta^2 = \alpha - m_1\beta \,, \quad \alpha = m_2\beta \quad \text{gegeben.}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß die Betragflächen zur allgemeinen Potenz und gewisse, eng mit ihnen zusammenhängende Realteilflächen überhaupt die einzigen Flächen sind, bei denen sich sowohl die Projektionen der Höhenlinien und die Projektionen der zu ihnen konjugierten Linien als auch die Projektionen der Fallinien und die Projektionen der zu ihnen konjugierten Linien jeweils unter festem Winkel schneiden.

Um dies nachzuweisen, haben wir die gemeinsamen Lösungen von

1. und 2. zu ermitteln. Aufgrund unserer Erfahrungen in den Abschnitten 1.2, 2.1 und 2.2 liegt es nahe, die vorliegenden Differentialgleichungen wieder mit der Legendreschen Transformation zu bearbeiten. Wir wählen die gleichen Bezeichnungen wie in den genannten Abschnitten und gelangen so zu

4. $\omega_{\psi\psi} + \varrho\omega_\varrho + m_1(\varrho\omega_{\varrho\psi} - \omega_\psi) = 0$ und

5. $\varrho^2\omega_{\varrho\varrho} - m_2(\varrho\omega_{\varrho\psi} - \omega_\psi) = 0$.

Bei dieser Transformation können Lösungen verlorengehen, nämlich solche, die zugleich der Abwickelbarkeitsbedingung

6. $w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = 0$ genügen. Obwohl bei unserer Problemstellung, die sich mit Paaren konjugierter Scharen befaßt, die Torsen nicht unmittelbar interessieren, wollen wir einige Anmerkungen zu ihnen machen. Da die Tangentialebenen längs der Erzeugenden bei den Torsen konstant sind, fallen die Scharen $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ und $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ bei ihnen zusammen mit den Projektionen der Erzeugenden. Genügt also $w = w(x,y)$ sowohl 1. und 6. bzw. 2. und 6., so genügt sie auch 2. bzw. 1., wobei $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt. Dies zeigt man auch leicht rechnerisch. Die abwickelbaren Integralflächen von 1. und 2. haben also die Eigenschaft, daß die Projektionen der Erzeugenden die Projektionen der Höhenlinien unter festem Winkel schneiden.

Wir kennen eine derartige Fläche, nämlich den bereits mehrfach betrachteten Kegel der logarithmischen Spirale. Dieser Kegel spielt aber für die abwickelbaren Flächen unter den Integralflächen von 1. und 2. eine ausgezeichnete Rolle; denn man kann zeigen, daß diese Torsen gerade die Tangentenflächen solcher Raumkurven sind, deren Tangenten den Erzeugenden eines derartigen Kegels parallel sind. Begreift man den Kegel der logarithmischen Spirale als Verallgemeinerung des geraden Kreiskegels, so kann man diese Raumkurven als Verallgemeinerung der im Abschnitt 2.2 erwähnten Böschungslinien ansehen, deren Tangenten ja gerade parallel zu den Erzeugenden eines geraden Kreiskegels verlaufen.

Bei den Tangentenflächen der Böschungslinien, den Böschungstorsen, sind die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden in parallelen Ebenen gelegen, wobei der gemeinsame Stellungsvektor der Ebenen zu der Kegelachse parallel ist. Also schneiden sich auch die Projektionen der Erzeugenden und die

Projektionen der Orthogonaltrajektorien auf eine feste Ebene dieser Schar rechtwinklig. Unter diesem Aspekt sind die oben genannten Torsen gleichfalls eine Verallgemeinerung der Böschungstorsen.

Am Schluß dieses Abschnittes geben wir einige Beispiele von Raumkurven, deren Tangenten zu den Erzeugenden eines Kegels der logarithmischen Spirale parallel laufen.

Wir wenden uns jetzt dem Problem zu, die gemeinsamen Lösungen von 4. und 5. zu bestimmen.

5. können wir auch in der Form

7. $\omega_{\varsigma\varsigma} = m_2 \frac{\partial}{\partial \varsigma} \frac{\omega_\psi}{\varsigma}$ schreiben. Daraus erhalten wir

8. $\varsigma\omega_\varsigma = m_2\omega_\psi + \varsigma h(\psi)$. Differenzieren wir die letzte Gleichung partiell nach ς bzw. ψ , dann erhält man

9. $\varsigma\omega_{\varsigma\varsigma} = m_2\omega_{\varsigma\psi} - \omega_\varsigma + h(\psi)$ bzw.

10. $\varsigma\omega_{\varsigma\psi} = m_2\omega_{\psi\psi} + \varsigma h'(\psi)$. Die letzte Gleichung notieren wir uns auch noch in der Form

11. $m_2\omega_{\psi\psi} = \varsigma\omega_{\varsigma\psi} - \varsigma h'(\psi)$. Multiplizieren wir jetzt 4. mit m_2 und 5. mit m_1 , und addieren wir anschließend die Gleichungen, dann führt dies auf

12. $m_2\omega_{\psi\psi} + m_2\varsigma\omega_\varsigma + m_1\varsigma^2\omega_{\varsigma\varsigma} = 0$. Die letzten beiden Gleichungen liefern uns

13. $\omega_{\varsigma\psi} - h'(\psi) + m_2\omega_\varsigma + m_1\varsigma\omega_{\varsigma\varsigma} = 0$. Multiplizieren wir 9. mit m_1 und ersetzen in 13. $m_1\varsigma\omega_{\varsigma\varsigma}$ gemäß der so erhaltenen Gleichung, so gewinnen wir

14. $(1+m_1m_2)\omega_{\psi\varsigma} + (m_2-m_1)\omega_\varsigma + m_1h(\psi) - h'(\psi) = 0$. Durch Integration erhalten wir daraus

15. $(1+m_1m_2)\omega_\psi + (m_2-m_1)\omega + m_1\varsigma h(\psi) - \varsigma h'(\psi) = f(\psi)$. Ersetzen wir in 4. $\varsigma\omega_\varsigma$ gemäß 8., so folgt

16. $\omega_{\psi\psi} + m_2\omega_\psi + \varsigma h(\psi) + m_1(\varsigma\omega_{\varsigma\psi} - \omega_\psi) = 0$. Wird in dieser Gleichung $\varsigma\omega_{\varsigma\psi}$ gemäß 10. ersetzt, so führt dies zu

17. $(1+m_1m_2)\omega_{\psi\psi} + (m_2-m_1)\omega_\psi + \varsigma h(\psi) + m_1\varsigma h'(\psi) = 0$.

Differenzieren wir jetzt 15. partiell nach ψ und vergleichen die so entstehende Gleichung mit 17., so folgt aus dem Vergleich

18. $h''(\psi) + h(\psi) = 0$ und $f'(\psi) = 0$, also insbesondere

19. $h(\psi) = a\cos\psi + b\sin\psi$. Aus 8. und 19. folgt direkt

2o. $\xi\omega_\xi - m_2\omega_\psi = \xi(a\cos\psi + b\sin\psi)$. Wir machen zunächst die Transformation auf Polarkoordinaten rückgängig und erhalten dadurch aus 2o.

21. $(\xi + m_1\eta)\omega_\xi + (\eta - m_2\xi)\omega_\eta = a\xi + b\eta$. Wird jetzt die Legendresche Transformation gleichfalls rückgängig gemacht, gelangen wir zu

22. $(x - m_2y - a)\,w_x + (m_2x + y - b)\,w_y = 0$.

Setzt man

23. $x_o = \frac{a+m_2b}{1+m_2^2}$, $y_o = \frac{b-m_2a}{1+m_2^2}$, so ist

24. $a = x_o - m_2y_o$, $b = m_2x_o + y_o$, und 22. geht über in

25. $((x-x_o) - m_2(y-y_o))w_x + (m_2(x-x_o) + (y-y_o))\,w_y = 0$.

Hieraus ersieht man, daß o.B.d.A. mit der Differentialgleichung

26. $(x - m_2y)\,w_x + (m_2x + y)\,w_y = 0$ weitergearbeitet werden kann. Geht man vermöge

27. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ zu Polarkoordinaten über, so erhält man schließlich die Differentialgleichung

28. $rw_r + m_2w_\varphi = 0$, deren Integration keine Schwierigkeiten bereitet. Wir erhalten aus 28.

29. $w = w(r,\varphi) = g(re^{-\frac{1}{m_2}\varphi})$. Wir wissen bereits, daß für beliebiges g 29. eine Lösung von 2. liefert. Wir haben nur noch zu prüfen, für welche g 29. auch eine Lösung von 1. liefert. Die Differentialgleichung 1. haben wir bereits im Abschnitt 5.1 auf Polarkoordinaten umgeschrieben. Gehen wir mit dem Ansatz 29. in diese Differentialgleichung ein, so erhält man nach längerer, aber einfacher Rechnung die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für g:

3o. $u\cdot(1+m_2^2)\,g''(u) + (1+m_1m_2)\,g'(u) = 0$. Das führt mit 29., abgesehen von belanglosen additiven Konstanten, zu den Lösungen

$$w(r,\varphi) = cre^{-\frac{1}{m_2}\varphi} \quad \text{für } m_1\cdot m_2 = -1\,,$$

(3o) $$w(r,\varphi) = c\log r - \frac{c}{m_2}\varphi \quad \text{für } m_1 = m_2\,,$$

$$w(r,\varphi) = cr^{-\gamma}e^{-\frac{1}{m_2}(1+\gamma)\varphi} \quad \text{für } \gamma = -\frac{1+m_1m_2}{1+m_2^2} \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}.$$

Über den Fall $m_1\cdot m_2 = -1$, also den Kegel der logarithmischen Spirale, ist bereits alles Notwendige gesagt. Für $m_1 = m_2$ er-

halten wir Schraubenflächen der Logarithmuskurve, die sich als Realteilfläche zu $f(z) = (c + i\frac{c}{m_2})\log z$ deuten lassen. Hier schneiden sich die Scharen $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ und $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ selbst rechtwinklig, wie wir im Anschluß an (26) bereits anmerkten. Der dritte Fall schließlich führt uns auf die Potenzbetragflächen, wobei für den Exponenten die unter 3. notierten Relationen gelten. Wir fassen unser Ergebnis zusammen in

Satz 24: Schneiden sich bei der nicht abwickelbaren Fläche $w = w(x,y)$ sowohl die Kurven $\frac{w_x}{w_y} = \text{const}$ und die Höhenlinienprojektionen als auch die Kurven $w_x^2 + w_y^2 = \text{const}$ und die Fallinienprojektionen jeweils unter festem Winkel, so kann die Fläche entweder als Realteilfläche zu $f(z)=(\alpha+i\beta)\log(z-z_0)$ oder als Betragfläche zu $f(z)= z_1(z-z_0)^{\alpha+i\beta}$ aufgefaßt werden.

Mit diesem Resultat beschließen wir unsere Untersuchungen. Wir geben zum Abschluß wie angekündigt drei Beispiele für Raumkurven an, deren Tangenten parallel zu den Erzeugenden eines Kegels der logarithmischen Spirale verlaufen. Die zugehörigen Tangentenflächen sind also Integralflächen von 1. und 2. mit $m = m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

31. $x = \cos\varphi\ ,\ y = \sin\varphi\ ,\ w = e^{-\frac{1}{m}\varphi}$;

32. $x = e^{-\frac{1}{m}\varphi}\cos\varphi\ ,\ y = e^{-\frac{1}{m}\varphi}\sin\varphi\ ,\ w = e^{-\frac{2}{m}\varphi}$;

33. $x = e^{\frac{1}{m}\varphi}\cos\varphi\ ,\ y = e^{\frac{1}{m}\varphi}\sin\varphi\ ,\ w = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}\varphi$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{m}$.

31. ist eine Parameterdarstellung der auf dem Einheitszylinder gelegenen Exponentialwendel, deren Beziehung zu gewissen Potenzbetragflächen wir bereits andernorts angesprochen haben.

32. kann aufgefaßt werden als eine Fallinie auf der Potenzbetragfläche zu $f(z) = z^{\alpha+i\beta}$ mit $\alpha = \frac{2}{1+m^2}$, $\beta = \frac{2m}{1+m^2}$.

Die durch 33. gegebene Raumkurve kann gedeutet werden als eine Fallinie der Realteilfläche zu $f(z) = (\alpha + i\beta)\log z$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{m}$.

Die Tangantenflächen dieser Raumkurven haben die gemeinsame Eigenschaft, daß sich die Projektionen der Erzeugenden und die Projektionen der Höhenlinien unter festem Winkel ϑ mit $\tan\vartheta = m$ schneiden.

LITERATURVERZEICHNIS

[I] H. Behnke u. F.Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Berlin - Heidelberg - New York 1965

[II] W. Blaschke u. K.Leichtweiß, Elementare Differentialgeometrie, Berlin - Heidelberg - New York 1973

[III] C.Carathéodory, Funktionentheorie, Band I, Basel - Stuttgart 196o

[IV] R.Courant u. D.Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik II, Berlin - Heidelberg - New York 1968

[V] A.Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie, Berlin-Göttingen - Heidelberg 1961

[VI] F.Gackstatter, Zur Theorie der meromorphen und algebroiden Funktionen, Dissertation, Würzburg 1969

[VII] ---, Gesamtdefekt und Krümmungsmittelwerte bei meromorphen Funktionen, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wissensch., Mathem. - Naturwiss. Klasse, S. 79 - 1o2, 197o

[VIII] ---, Die Gaußsche und mittlere Krümmung der Realteilflächen in der Theorie der meromorphen Funktionen, Mathemat. Nachrichten, 54, S. 211 - 227, 1972

[IX] D.Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1962

[X] E.Kamke, Differentialgleichungen I, Leipzig 1969

[XI] ---, Differentialgleichungen II, Leipzig 1962

[XII] V.Kommerell u. K.Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I, Berlin - Leipzig 1931

[XIII] ---, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II, Berlin - Leipzig 1931

[XIV] G.Kowalewski, Einführung in die Analytische Geometrie, Leipzig 191o

[XV] E.Kreyszig, Differentialgeometrie, Leipzig 1968

[XVI] ---, Über Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen, Elemente der Mathematik, 24, S. 25 - 31, 1969

[XVII] E.Kreyszig u. A.Pendl, Über die Gauß - Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen, Elemente der Mathematik, 28, S. 1o - 13, 1973

[XVIII] K.Reich, Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann (1828 - 1868), Archive for History of Exact Sciences, Vol.11, S. 273 - 328, 1973

[XIX] O.Reimerdes, Die Niveau- und Fallinien auf Flächen, insbesondere auf Modulflächen analytischer Funktionen, Dissertation, Kiel 1911

[XX] K.Strubecker, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Göttingen 1967

[XXI] ---, Differentialgeometrie I, Berlin 1964

[XXII] ---, Differentialgeometrie II, Berlin 1969

[XXIII] ---, Differentialgeometrie III, Berlin 1969

[XXIV] E.Ullrich, Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten, Mathemat. Zeitschr., 54, S. 297 - 328, 1951

[XXV] ---, Geometrisches über Potenzbetragflächen, Zeitschr. für angew. Mathem. u. Mechanik, 31, S. 25o - 251, 1951

[XXVI] J.Zaat, Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen, Mitteilungen d. Mathemat. Sem. d. Univ. Gießen, 3o, S. 1 - 38, 1944

LEBENSLAUF

Am 24. Februar 1942 wurde ich, Dieter Schmersau, als Sohn des Zollamtmannes Kurt Schmersau und seiner Frau Anni, geb. Groth, in Berlin - Tempelhof geboren.
Im März 1962 legte ich an der Eckener - Oberschule in Berlin - Tempelhof die Reifeprüfung ab.
Zum Sommersemester 1962 schrieb ich mich an der Pädagogischen Hochschule Berlin ein. Nach einem 6 - semestrigen Studium mit dem Wahlfach Mathematik legte ich im Juli 1965 die Erste Staatsprüfung für das Amt des Lehrers mit einem Wahlfach ab.
Im August 1965 trat ich in Berlin - Kreuzberg in den Schuldienst ein. Dort legte ich im November 1967 die Zweite Staatsprüfung für das Amt des Lehrers ab.
Ab April 1966 studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik. Ich besuchte Vorlesungen, Übungen, Praktika und Seminare: in Mathematik von H.Begehr, A.Dinghas, G.Engel, N.Guthschmidt, H.Herrlich, H.Lenz, H.Meschkowski, H.F.Münzner, H.Pachale, G.Preuß, J.Roehmel, A.Stöhr; in Physik von G.Berendt, R.Honerjäger, H.Kleinert, E.Recknagel, A.Schönhofer (TU Berlin), G.Simonsohn, W.Theis, S.Wilking.
Im April 1970 erwarb ich das Vordiplom, im Juni 1974 das Diplom in Mathematik.
Seit Oktober 1973 arbeite ich als wissenschaftlicher Assistent an der Pädagogischen Hochschule Berlin im Wahlfach Mathematik.

Berlin, den 27.3.1977

Dieter Schmersau